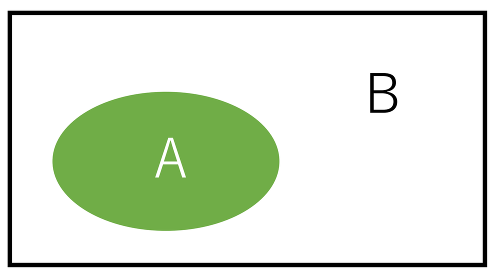
Fermionizationを用いた相互作用を含むEntanglement Rényi Entropyの解析

藤村晴伸*、共同研究者：西岡辰磨*、嶋守聡一郎*

*大阪大学理学研究科物理学専攻

1. Introduction

<場の量子論におけるEntanglement>



・全体系=A+B

・Reduced density matrix： $\rho_A \equiv tr_B\, |0\rangle\langle 0|$

部分系AとBの量子もつれの大きさを表す量

・Entanglement Entropy： $S(A) \equiv -tr_A\,(\rho_A \log\rho_A)$

・n-th Rényi Entropy　： $S_n(A) \equiv \frac{1}{1-n}\log[\,tr_A(\rho_A^n)]$

$\lim_{n\to 1} S_n\,(A) = S(A)$

$\boxed{S(A),\ S_n(A)\ は理論を特徴付ける量子情報量}$

一般的な計算方法：Replica法(解析計算)、数値計算

しかし、相互作用がある場合、これらの方法では計算が困難！

我々のアイデア：Bose-Fermi duality

Fermion		Boson
離散対称性：$\mathbb{Z}_2^{\mathcal{F}}$	fermionization ←	離散対称性：$\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}$
局所演算子：$\hat{O}^{\mathcal{F}}$		局所演算子：$\hat{O}^{\mathcal{B}}$
分配関数：$Z^{\mathcal{F}}$	→ bosonization	分配関数：$Z^{\mathcal{B}}$

我々の研究結果：
Fermionizationを相互作用のあるfermionのモデルに適応し、Rényi Entropy を非摂動論的に求められる例を示した。

2. Model

<本研究で扱うモデル>

Massless Thirring model

$$S^{\mathcal{F}}[\lambda] = \int d^2x \left(i\,\bar\psi\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \underbrace{\tfrac{\lambda}{2}\,(\bar\psi\,\gamma^\mu\psi)(\bar\psi\,\gamma_\mu\psi)}_{相互作用}\right)$$

$\psi(x)$: fermion 場

λ : Thirring coupling

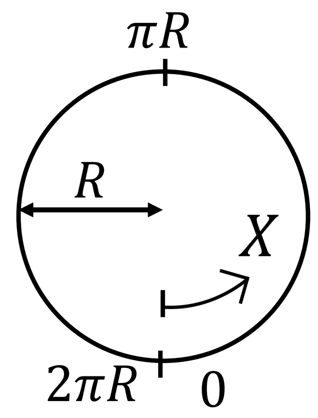
$\mathbb{Z}_2^{\mathcal{F}} : \psi \to -\psi$

そのままでは解析が難しい

fermionize ↑ ↓ $\frac{4}{R^2} = 1 + \frac{\lambda}{\pi}$

Free compact boson

$$S^{\mathcal{B}}[\,R\,] = \frac{1}{8\,\pi}\int d^2x\,\partial_\mu X\,\partial^\mu X$$



$X(x)$: scalar 場 ， $X \sim X + 2\pi R$

R : compact boson radius

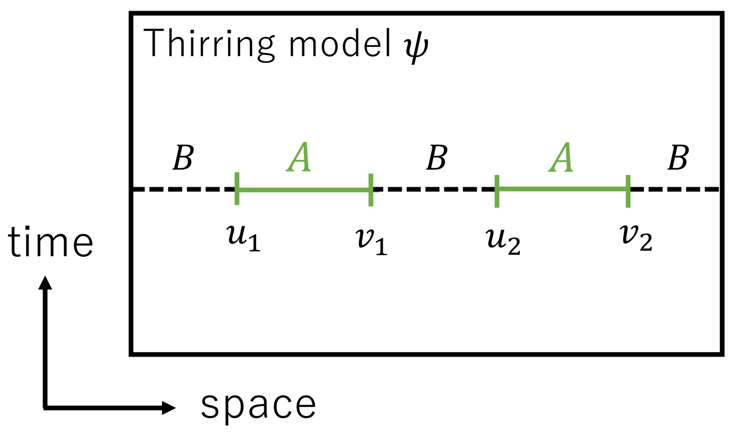
$\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}} : X \to X + \pi R$

Free theoryなので解析的によくわかる！

本研究のターゲット

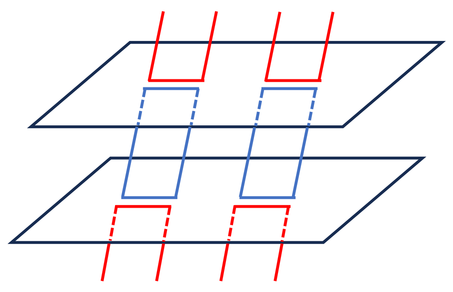
2-interval, 2nd Rényi Entropy

$$S_{2,2}(A,\lambda) = -\log[tr(\rho_A^2)]$$



3. Rényi Entropy and fermionization

Replica 法

$\Sigma_{2,2} =$  $Plane =$ 

$$S_{2,2}(A,\lambda) = -\log[tr(\rho_A^2)] = -\log\left(\frac{Z^{\mathcal{F}}_{\Sigma_{2,2}}}{(Z^{\mathcal{F}}_{Plane})^2}\right)$$

Conformal map

cross ratio : $x = \frac{(v_1-u_1)(v_2-u_2)}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}$　　moduli $\tau = \tau(x)$

$$S_{2,2}(A,\lambda) = (UV発散項) + f(x) - \log Z^{\mathcal{F}}_{Torus}$$

Fermionization

General dictionary

$$Z^{\mathcal{F}}_{X_g} = \frac{1}{2^g}\sum_t Z^{\mathcal{B}}_{X_g}\,[t]\,\exp(i\pi[Arf[t\cdot\rho] + Arf[\rho]])$$

fermion　　boson　　Arf invariant = 0 or 1

g : genusの数　　$t : \mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}$ ゲージ場

Torus case $(g=1)$:　$Arf[\rho] = \begin{cases} 1\,,\ \rho = PP \\ 0\,,\ \rho = AP, PA, AA \end{cases}$

$$Z^{\mathcal{F}}_{Torus}[AA] = \frac{1}{2}(Z^{\mathcal{B}}_{Torus}[00] + Z^{\mathcal{B}}_{Torus}[01] + Z^{\mathcal{B}}_{Torus}[10] - Z^{\mathcal{B}}_{Torus}[11])$$

Free theory

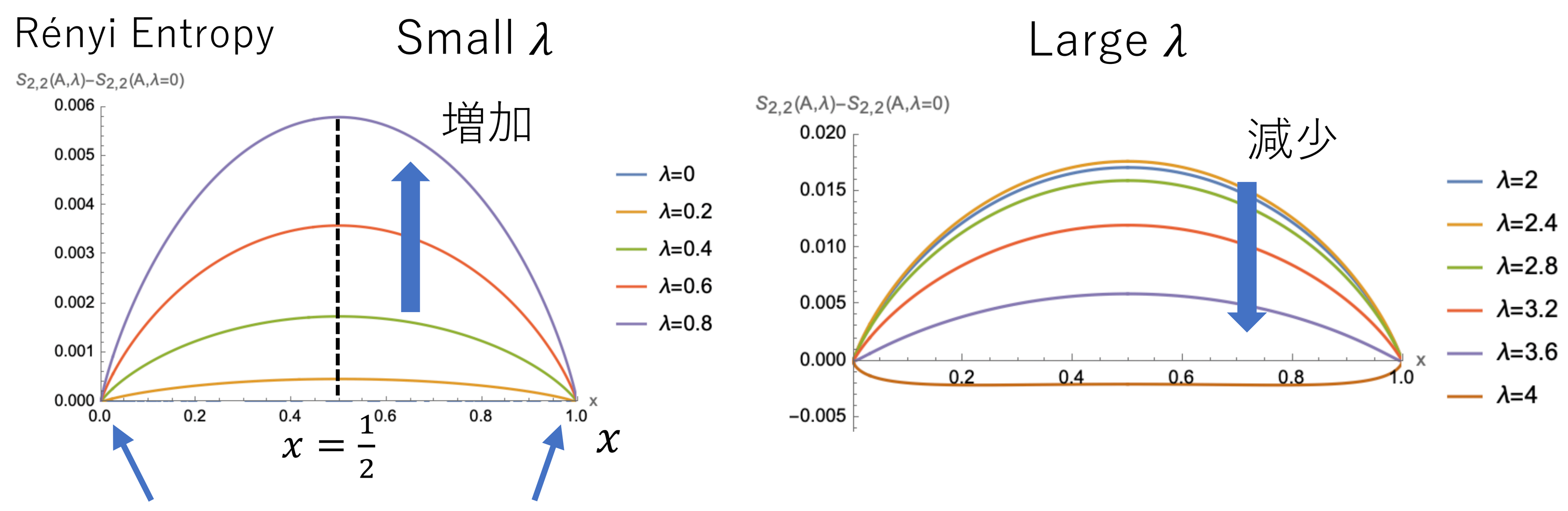
Analytical results

$$S_{2,2}(A,\lambda) = S_{2,2}(A,0) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{\theta_2^2\widetilde{\theta_2}^2 + \theta_3^2\widetilde{\theta_3}^2 + \theta_4^2\widetilde{\theta_4}^2}{2\,\theta_3^4(il)}\right]$$

$\theta_i \equiv \theta_i\left(il\frac{4}{R^2}\right)$ ，$\widetilde{\theta}_i \equiv \theta_i\left(il\frac{R^2}{4}\right)$， $i = 2,3,4.$ ：Jacobi θ 関数

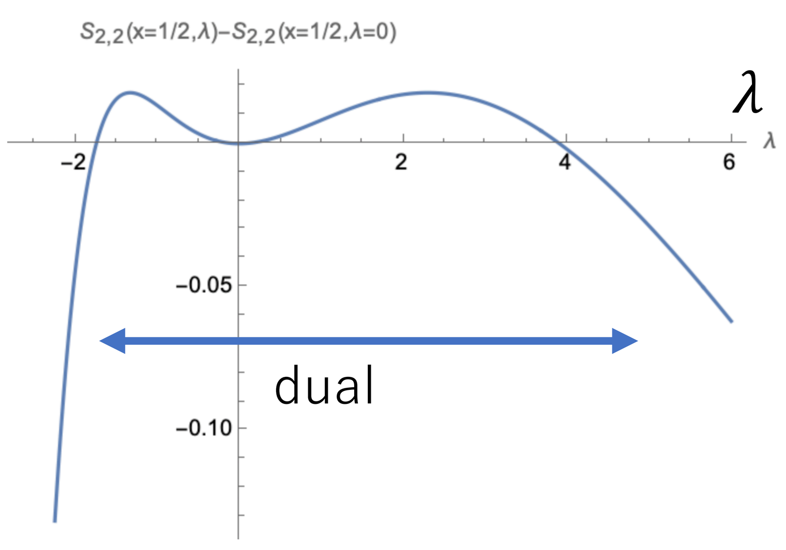
$\tau = il \leftrightarrow x$　，　$R \leftrightarrow \lambda$

4. Plots of Analytical Results

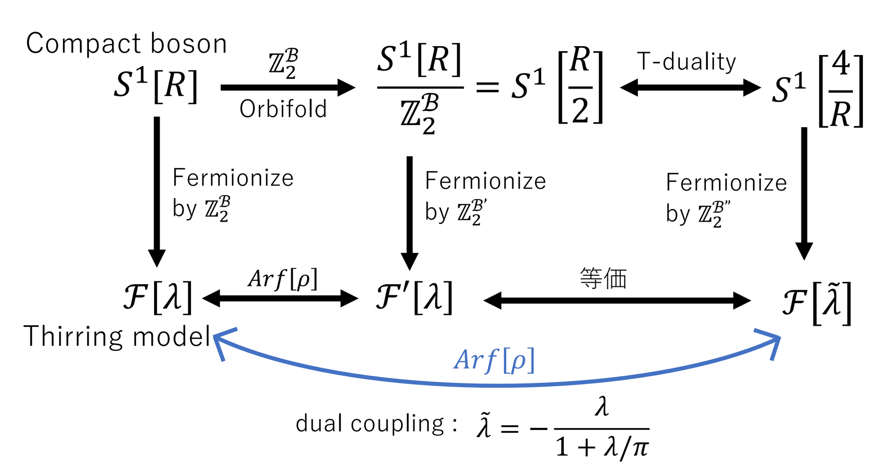


先行研究とconsistent
1-interval Rényi E　$S_{1,n} = \frac{c}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{v-u}{\epsilon}\right)$　c : central charge, ϵ : UV cutoff

最大値(最小値)のλ依存性



<付録>



5. Summary

・fermionizationを用いて相互作用系のある系のRényi Entropyを非摂動論的に計算した。

・計算結果は既存の結果とconsistentであった。

・Thirring modelの相互作用が十分大きい場合、Entanglementは減少することが分かった。

・Bose-Fermi dualityは場の量子論を調べる上で強力な双対性である。

<Furture work>

・3-interval、高次のRényi Entropy　→　Higher genus になる。

・Massive Thirring model 、その他の相互作用モデル。

fujimura@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

2023/8/19 原子核若手三者夏の学校2023 @東京