相互作用を含む相対論的量子論における エンタングルメントRényiエントロピーの厳密計算

藤村晴伸[†]、共同研究者： 西岡辰磨[†]、嶋守聡一郎[†]
[†]大阪大学理学研究科物理学専攻

arXiv:2309.11889

1. 導入

(特殊)相対性理論+量子力学 ➡ **場の量子論**

場の量子論とは？

量子力学

量子多体系の場合、

$\hat{q}_1$ $\hat{q}_2$ $\hat{q}_3$ $\cdots$

空間方向

量子化：$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{i,j}$

$\hat{q}_i$：演算子
$\hat{p}_j$：共役運動量

場の量子論

➡「場」を導入する

$\hat{\phi}(x)$

x 空間方向

$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = i\hbar\,\delta(x-y)$

$\hat{\phi}(x)$: 演算子
$\hat{\Pi}(y)$：共役運動量

場の量子論は場を基本的な自由度とする量子論
(=無限自由度の量子論)
素粒子物理、原子核物理、物性物理など、物理で幅広く応用されている。

研究背景

量子エンタングルメントは量子情報だけでなく、
場の量子論においても重要な役割を果たす！
特に、臨界現象や弦理論の研究などで重要な概念
しかし…

計算が非常に困難

・現状で扱えるのは自由粒子といった簡単なモデルのみ。
・相互作用の厳密な効果はよくわかっていない

本研究の内容

相互作用を含む場の量子論のモデルにおいて、エンタングルメントを厳密に解析した。
計算の困難は共形対称性とボソン・フェルミオン双対性を用いることで解決した。

2. 問題設定

計算する量

場の量子論の場合、部分系=部分領域。
今回は空間全体を部分領域Vとそれ以外$\bar{V}$に分けて考える。
エンタングルメントRényiエントロピー(ERE)：

$$S_n(V) \equiv \frac{1}{1-n}\log \mathrm{Tr}_V[\rho_V^n] \quad ,n \in \mathbb{Z}_+$$

：領域Vと$\bar{V}$の間にあるエンタングルメントの大きさを表す量。

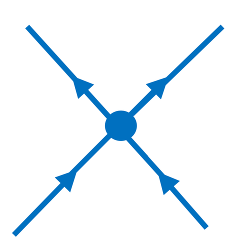
今回は簡単のため$n=2$とし、部分領域は$V = V_1 \cup V_2$とする。

$\bar{V}$ V_1 $\bar{V}$ V_2 $\bar{V}$ 空間方向 ⟶

扱う場の量子論のモデル

massless Thirring model [Thirring 1958]

$$\mathcal{L} = \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi}_{\text{自由粒子}} + \frac{\pi}{2}\lambda\underbrace{(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)}_{\text{相互作用項}}$$

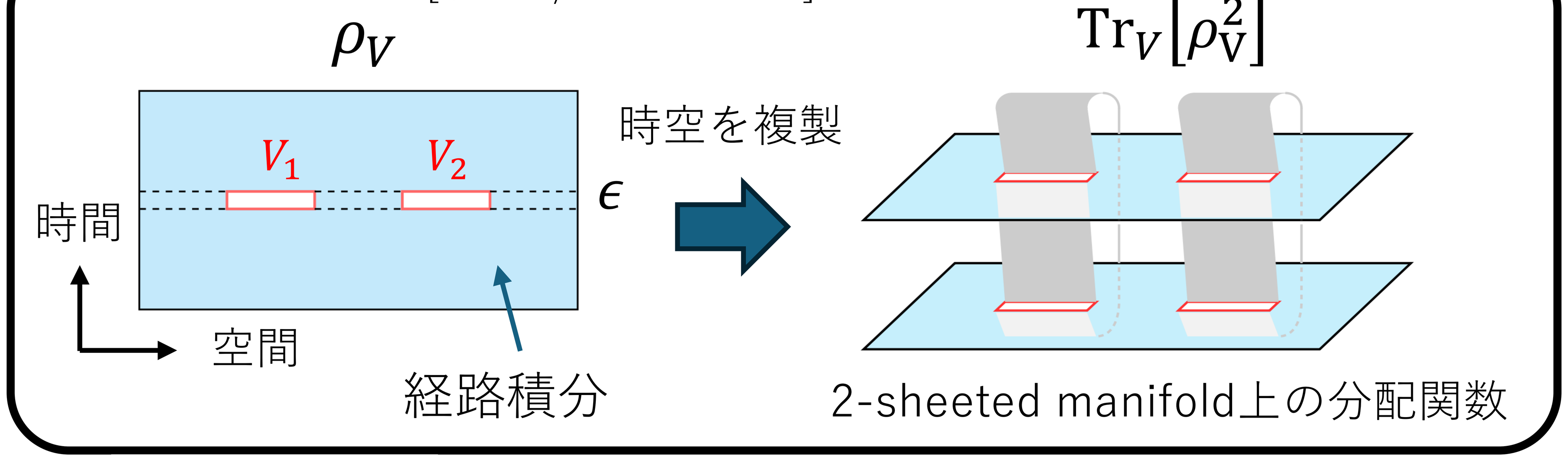


ψ：fermion場
λ：相互作用の大きさを表す定数

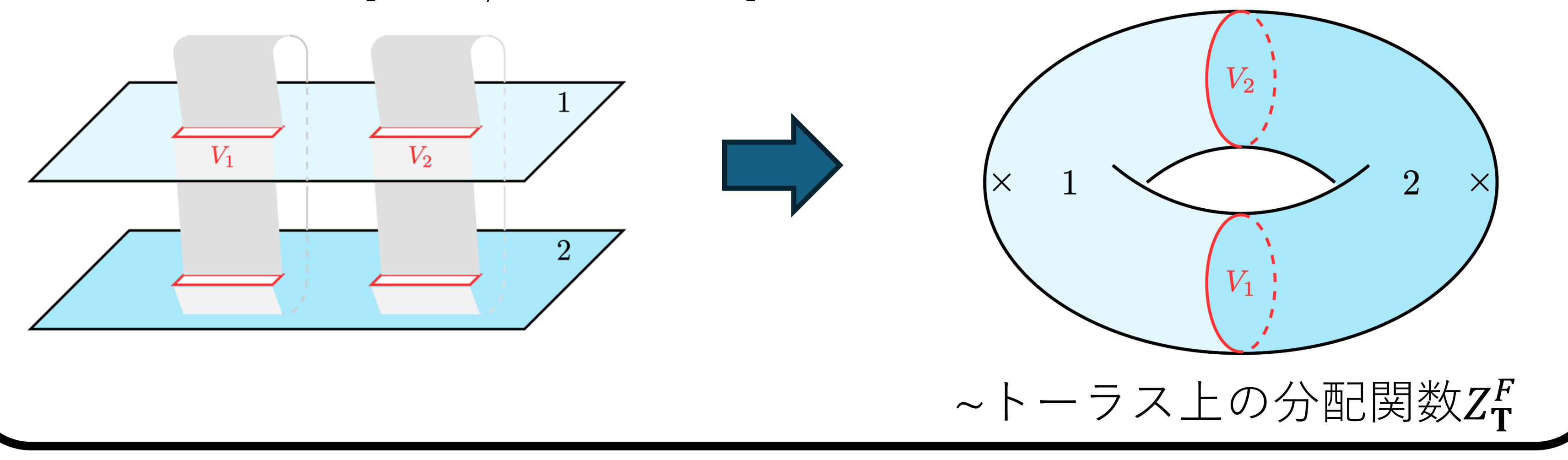
(※2次元時空上の共形場理論の一つ)

3. 解析方法

Replica法 [Casini, Huerta. 2009]



共形変換 [Lunin, Mathur 2001]



ボソン・フェルミオン双対性 [Karch, Tong, Turner 2019]

$\underbrace{\text{Massless Thirring}}_{\text{相互作用あり}} \Leftrightarrow \underbrace{\text{自由ボソン} \times \text{Kitaev鎖}}_{\text{解析しやすい}}$

分配関数Z_T^Fをボソン側から構成できる

4. 結果

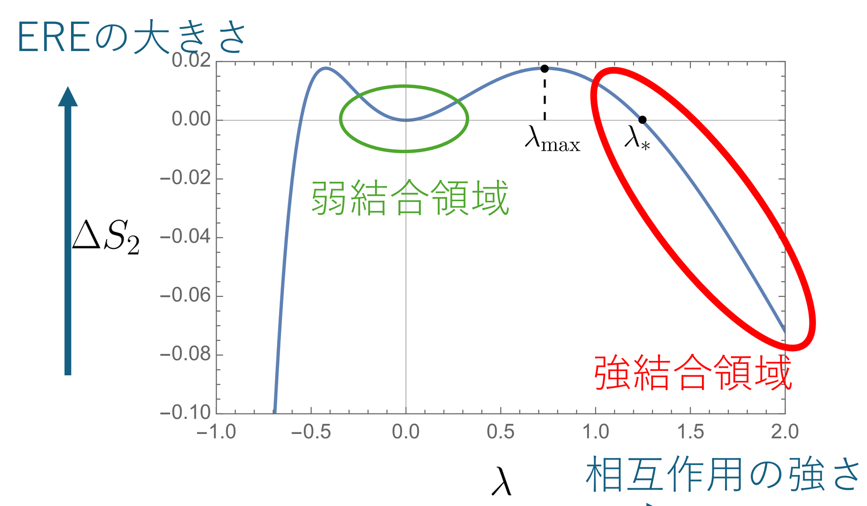
解析結果

$$S_2(V,\lambda) = \underbrace{S_2(V,0)}_{\text{自由粒子}} - \underbrace{\frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(\tau)}\sum_{j=2}^{4}\vartheta_j^2\big(\tau(1+\lambda)\big)\,\vartheta_j^2\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right)\right]}_{\text{相互作用の寄与}}$$

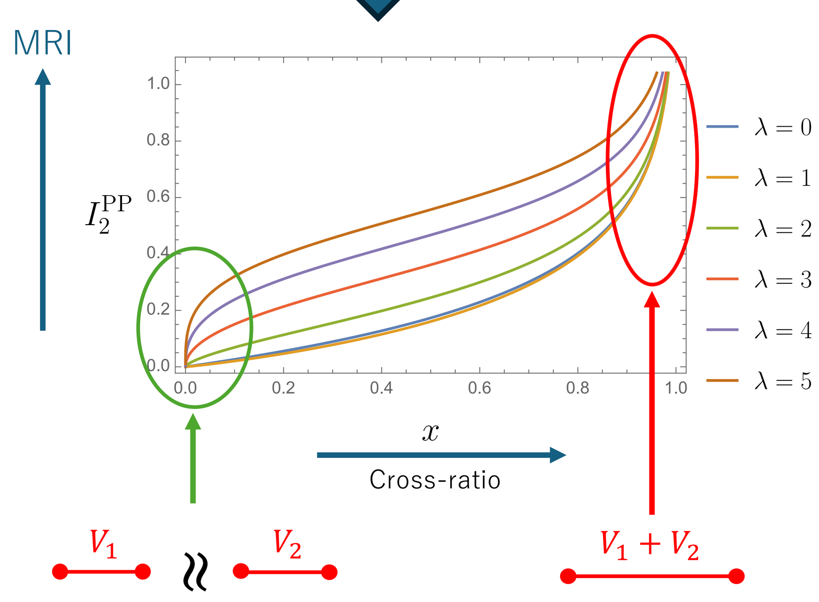
λ：結合定数
$\vartheta_j(\tau),\ j=2,3,4$：Jacobi theta 関数

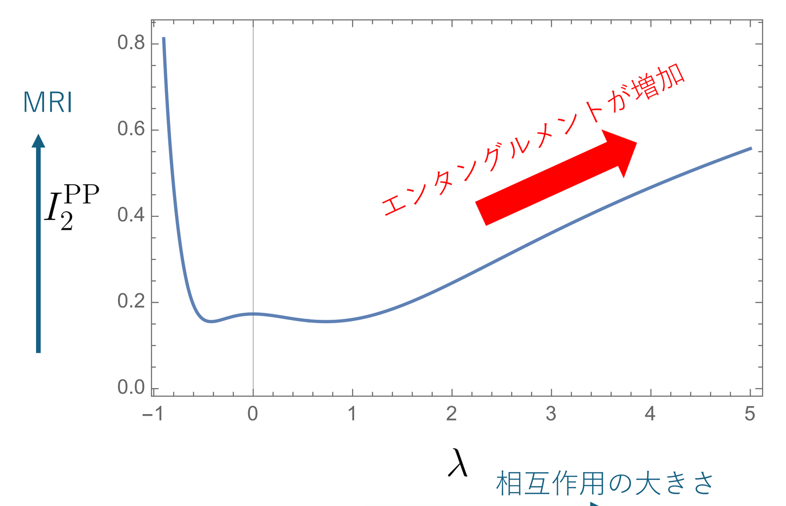
この公式は任意の結合定数λに対して成り立つ！
➡強結合領域$|\lambda| \gg 1$も含めた厳密な結果

EREに対する相互作用の寄与：
$$\Delta S_2(\lambda) = S_2(V,\lambda) - S_2(V,0)$$



相互Rényi情報量(MRI)：
$$I_n(\lambda, V_1, V_2) = S_n(V_1) + S_n(V_2) - S_n(V_1 \cup V_2)$$





5. まとめと展望

- 場の量子論(=相対性理論＋量子力学)においてもエンタングルメントは重要な概念
- しかし、解析が難しく、相互作用の効果を厳密に解析した例はなかった。
- 本研究では共形対称性とボソン・フェルミオン双対性を用いて相互作用の寄与を厳密に計算した。
- 既存研究では不明であった強結合領域も含めてThirring modelのエンタングルメント構造を明らかにした。

<本研究の展望>
- 高次($n \geq 3$)のRényiエントロピーの解析
- massive Thirring modelをはじめとする他のモデルへの応用
- その他の量子情報量(negativityなど)への応用

fujimura@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

2025/5/28 第52回量子情報技術研究会(QIT52)@静岡大学