相互作用を含む場の量子論のRényiエントロピーの解析

藤村晴伸*

共同研究者：西岡辰磨*、嶋守聡一郎*

*大阪大学素粒子論研究室

2023/10/13 @大阪大学南部陽一郎ホール

[arXiv:2309.11889](https://arxiv.org/abs/2309.11889)

アウトライン

1. イントロダクション
2. 解析方法
3. 解析結果のパラメーター依存性
4. まとめと展望

1. イントロダクション

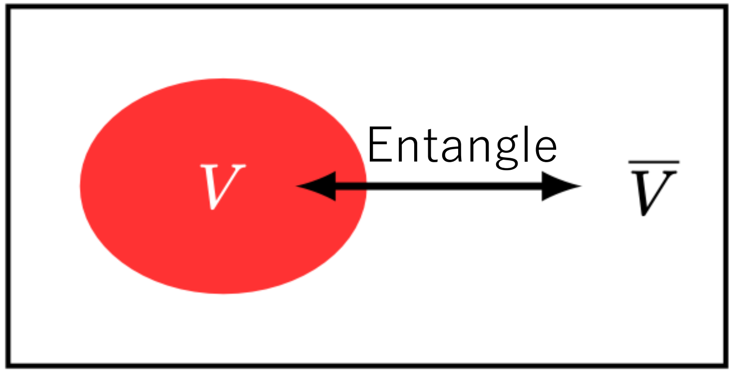
1. 場の量子論におけるエンタングルメント

全体系の状態：$|0\rangle$

密度行列：$\rho_{\mathrm{tot}} = |0\rangle\langle 0|$

空間分割： $V_{\mathrm{tot}} = V \cup \bar{V}$

縮約密度行列： $\rho_V = \mathrm{Tr}_{\bar{V}}[\rho_{\mathrm{tot}}]$



V_{tot}

エンタングルメントエントロピー(EE)：

$$S(V) \equiv -\log \mathrm{Tr}_V[\rho_V \log \rho_V]$$

$$\lim_{n\to 1} S_n(A) = S(A)$$

エンタングルメントRényiエントロピー(ERE)：

$$S_n(V) \equiv \frac{1}{1-n} \log \mathrm{Tr}_V[\rho_{\mathrm{V}}^n] \quad , n \in \mathbb{Z}_+$$

EEとEREは系を特徴付ける重要な量子情報量

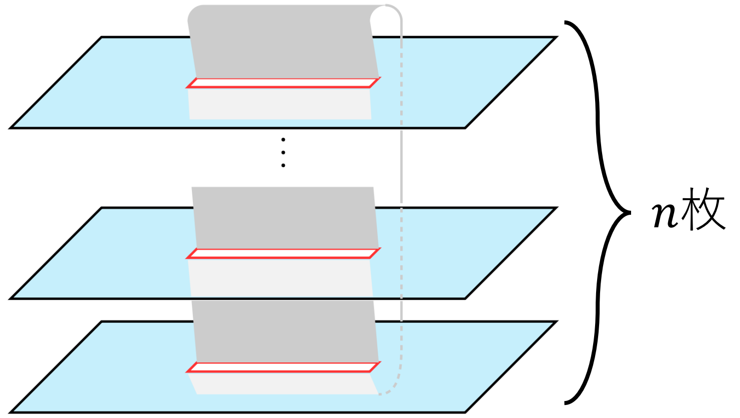
1. 場の量子論におけるエンタングルメント

一般的な解析手法 ➡ Replica法

$$\mathrm{Tr}_V[\rho_V^n] \sim Z_n$$

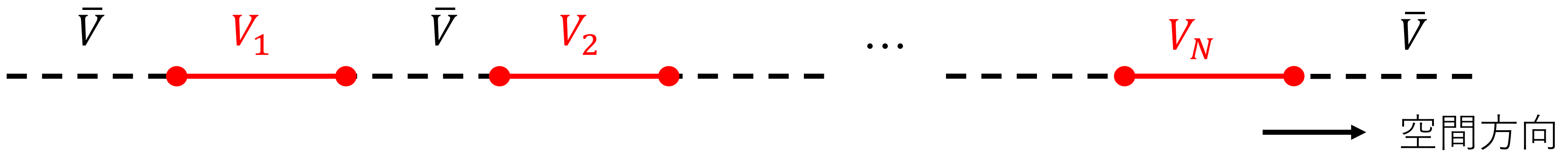
分配関数

➡ EREの計算～分配関数の計算



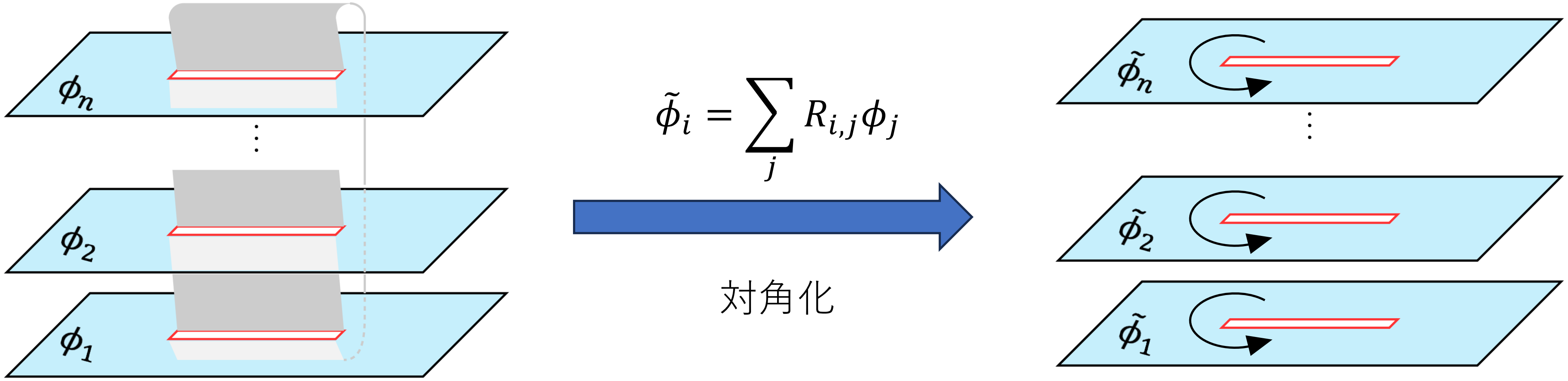
以降(1+1)次元を考える。

領域Vを分割：$V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$



解析計算の例１：自由場

- ✔ Free massless fermion. n-sheets, N-intervals [Casini, Fosco, Huerta 2005]
- ✔ Free compact boson. 2-sheets, 2-intervals [Calabrase, Cardy, Tonni 2011]



Freeのとき： $\sum_j \phi_j^2 = \sum_j \widetilde{\phi_j}^2$

○

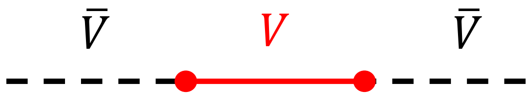
相互作用がある場合： $\sum_j \phi_j^4 \neq \sum_j \widetilde{\phi_j}^4$

× 解析が困難

1. 場の量子論におけるエンタングルメント

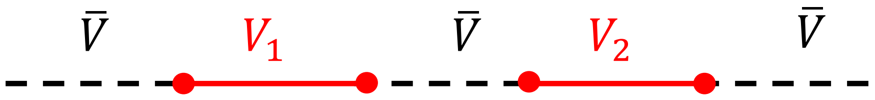
解析計算の例２：CFT

✔ Single interval [Holzhey,Larsen, Wilczek 1994]



しかし、2-interval以上は共形対称性からEE,EREを決められない

✕ 2-intervalの場合：



相互情報量：$I(V_1, V_2) \equiv S(V_1) + S(V_2) - S(V_1 \cup V_2)$

↓

相互作用を含む場の量子論で、2-interval以上の計算は難しい

1. Boson-fermion双対性

我々のアイデア：boson-fermion双対性を使う。[Karch, Tong, Turner 2019]

Fermionの理論 ：$\mathcal{T}_F$

局所演算子 : $\hat{O}^F$

離散対称性 : $\mathbb{Z}_2^F$

分配関数 : Z^F

fermionization

bosonization

Bosonの理論 ：$\mathcal{T}_B$

局所演算子 : $\hat{O}^B$

離散対称性 : $\mathbb{Z}_2^B$

分配関数 : Z^B

(1+1)次元、genusを持った閉じた多様体の場合のfermionization：

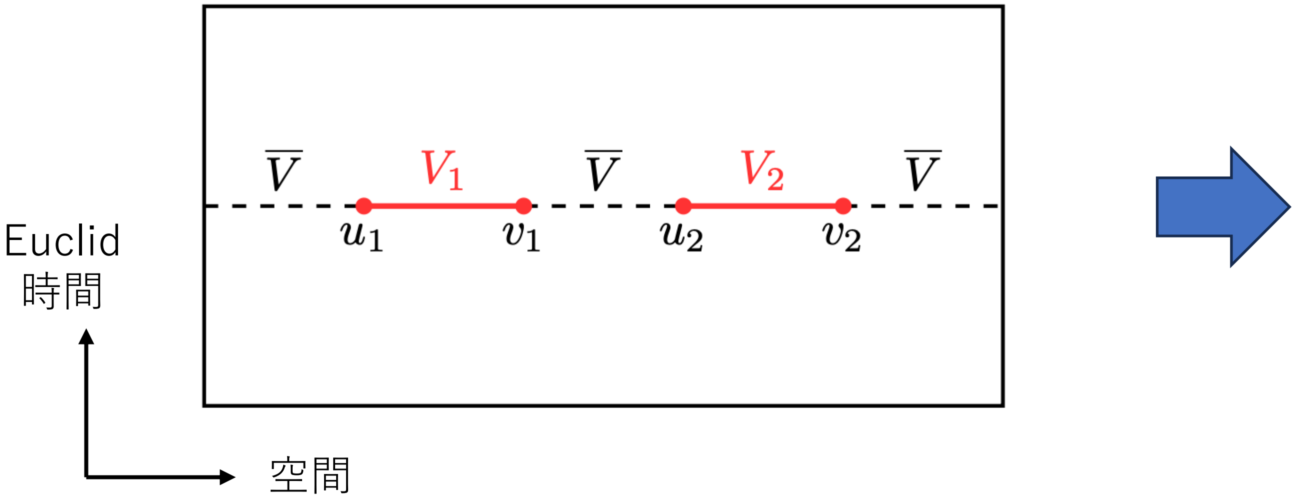
$$\mathcal{T}_F = \frac{\mathcal{T}_B \times \mathrm{TQFT}}{\mathbb{Z}_2^B}$$

$\mathbb{Z}_2^B$ゲージ化

1. 我々の研究

やったこと：

- Replica法とboson-fermion双対性を組み合わせて、相互作用のあるモデルでRényiエントロピー(ERE)と相互Rényi情報量(MRI)を厳密に計算した。
- モデルはMassless Thirring model (1+1次元、フェルミオン、4点相互作用)
- 2-intervals, 2-sheets (下の図)
- 得られた結果のパラメーター依存性を議論した。



$$S_2(V)$$

$$I_2(V_1, V_2)$$

2. 解析方法

2. モデル

Massless Thirring model

$$\mathcal{L}_F = i\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu \partial_\mu \psi \;+ \frac{\pi}{2}\lambda\,\underbrace{(\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\,\gamma_\mu\psi)}_{\text{相互作用}}$$

ψ：Dirac fermion

λ : Thirring coupling

$\mathbb{Z}_2^F$： $\psi \to -\psi$

Free compact boson

$$\mathcal{L}_B = \frac{R^2}{8\pi}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$$

$$\phi \sim \phi + 2\pi$$

ϕ：スカラー場

R : compact boson半径

$\mathbb{Z}_2^B$： $\phi \to \phi + \pi$

fermionization ←

$$1 + \lambda = \frac{4}{R^2}$$

そのままでは解析が難しい

自由場なので解析が簡単

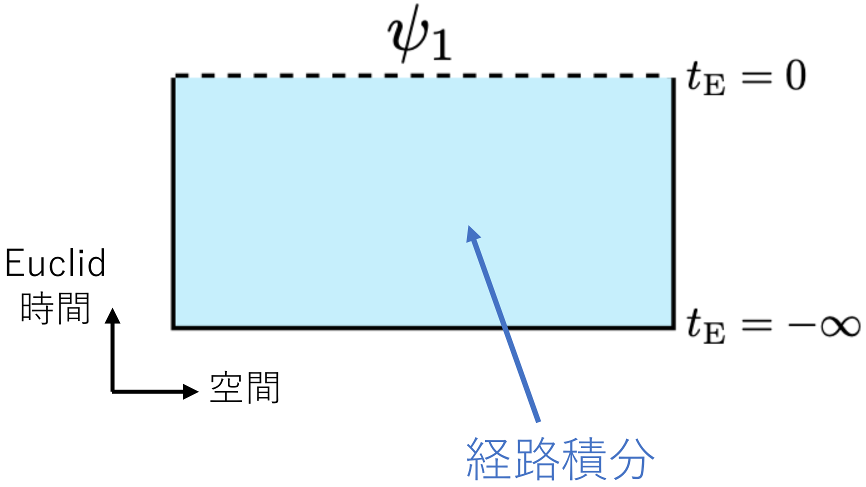
↓

fermionizationを用いてmassless Thirring modelを解析

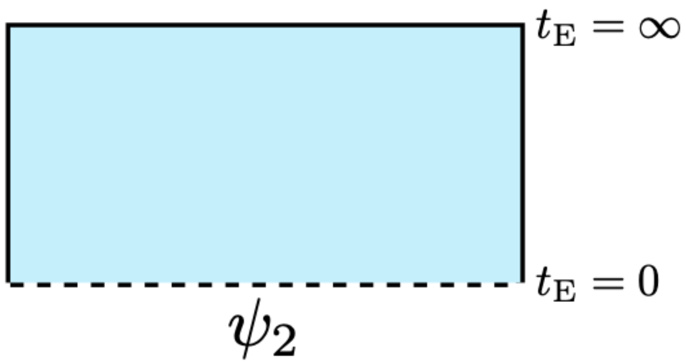
2. Replica法

Euclidean経路積分を考える。

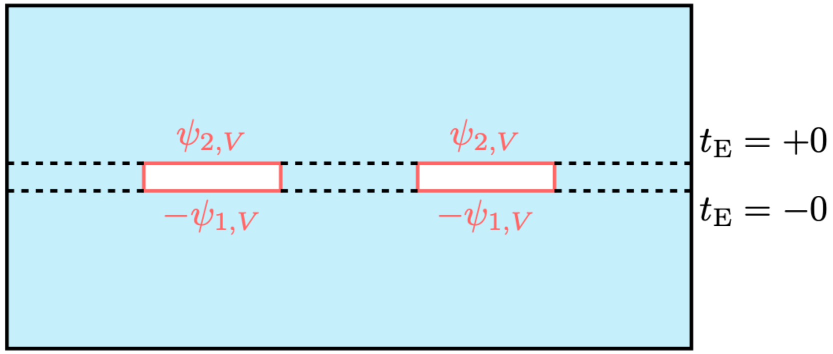
$\langle \psi_1 | 0 \rangle =$



$\langle 0 | \psi_2 \rangle =$

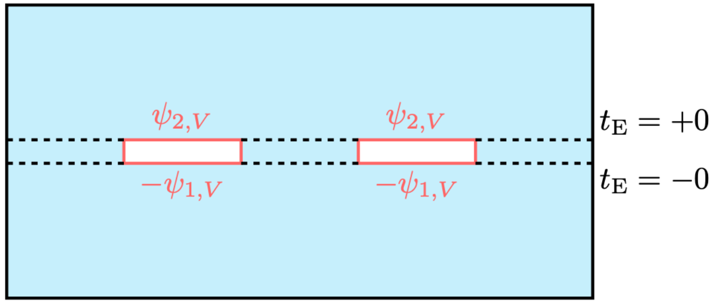


$$\rho_V(\psi_1, \psi_2) = \mathrm{Tr}_{\overline{V}}[\langle \psi_1 | 0 \rangle \langle 0 | \psi_2 \rangle] =$$

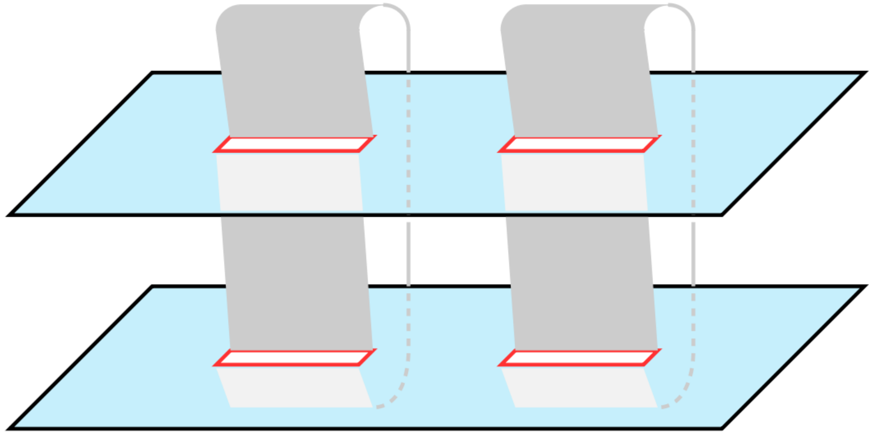


Target：$S_2(V) = -\log \mathrm{Tr}_V[\rho_V^2]$

$\rho_V(\psi_1, \psi_2) =$



$$\mathrm{Tr}_V[\rho_V^2] = \sum_{\psi_1,\psi_2} \rho_V(\psi_1,\psi_2)\,\rho_V(\psi_2,-\psi_1) =$$

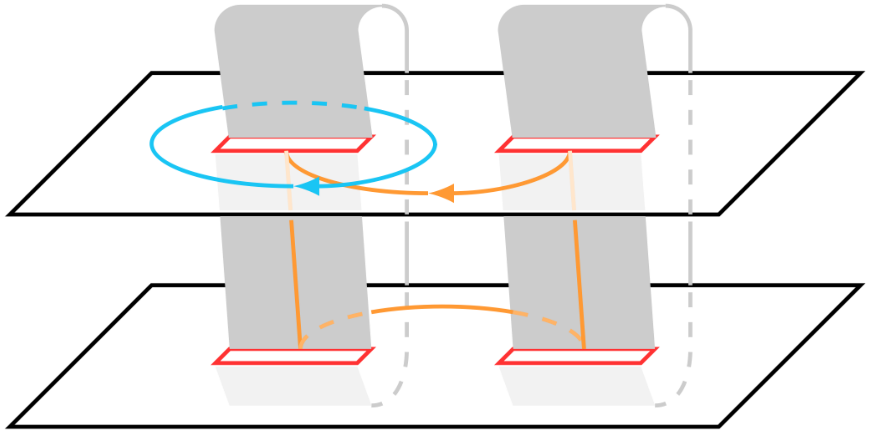


$\Sigma_{2,2}$

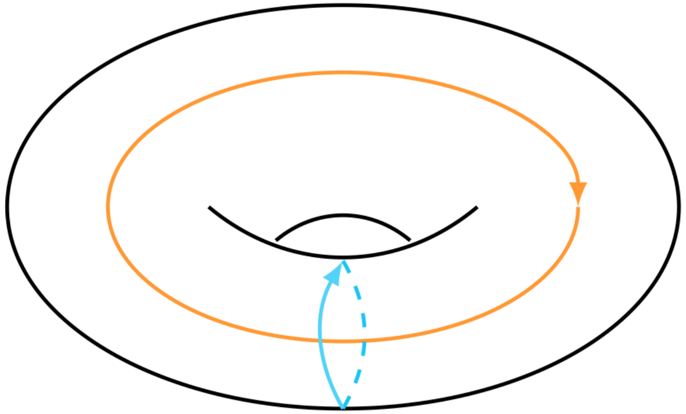
$\Sigma_{2,2}$上の分配関数$Z^F_{\Sigma_{2,2}}$を計算すれば良い

2. Conformal map

$\Sigma_{2,2}$は共形変換でトーラスにmapできる[Lumin, Mathur 2001]



$\Sigma_{2,2}$



$\mathbf{T}$

cross-ratio：$x = \dfrac{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}$ $\longleftrightarrow$ moduli：τ

$Z^F_{\Sigma_{2,2}} \propto Z^F_{\mathbf{T}}$ ➡ トーラス上の分配関数$Z^F_{\mathbf{T}}$を計算すれば良い

2. Fermionizationの辞書

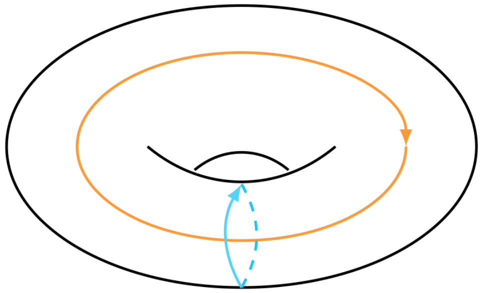
$$Z_X^F[\rho] = \frac{1}{2^g}\sum_{t\in H^1(X,\mathbb{Z}_2)} Z_X^B[t]\,\exp\left(i\pi\left[Arf[t\cdot\rho] + Arf[\rho]\right]\right)$$

fermion　　boson　　トポロジカル項

X：扱っている時空　　ρ：スピン構造

g： Xのgenusの数　　t： $\mathbb{Z}_2$ゲージ場

今回の場合：$g = 1$



$$Z_{\mathbf{T}}^F = \frac{1}{2}\underbrace{\left(Z_{\mathbf{T}}^B[00] + Z_{\mathbf{T}}^B[01] + Z_{\mathbf{T}}^B[10] - Z_{\mathbf{T}}^B[11]\right)}_{\text{自由場}}$$

相互作用あり

➡解析しやすい

2. 解析結果

$$S_2(V) \xrightarrow{\text{Replica法}} Z^{F}_{\Sigma_{2,2}} \xrightarrow{\text{共形map}} Z^{F}_{\mathbf{T}} \xrightarrow{\text{fermionization}} Z^{B}_{\mathbf{T}}$$

最終結果

$$S_2(V,\lambda) = S_2(V,0) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(\tau)}\sum_{j=2}^{4}\vartheta_j^2(\tau(1+\lambda))\,\vartheta_j^2\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right)\right]$$

Free項： $S_2(V,0) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{\ell_1}{\epsilon}\cdot\frac{\ell_2}{\epsilon}\right) + \frac{1}{4}\log(1-x)$ ➡既存の結果とconsistent

ℓ_1, ℓ_2：インターバルの長さ
ϵ：UV cutoff

$\vartheta_j(\tau),\ j = 2,3,4$：Jacobi theta 関数

相互Rényi情報量も同様に計算できる。

➡ 相互作用のある場の理論での厳密なRényiエントロピーを得た

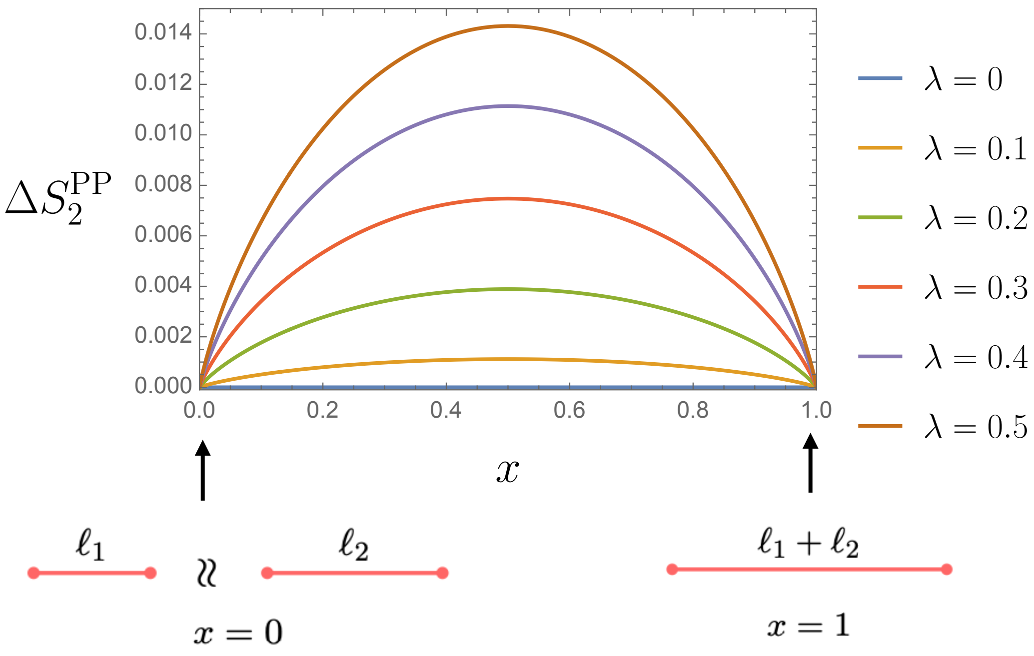
3. 解析結果のパラメーター依存性

3. Rényiエントロピーのインターバル依存性

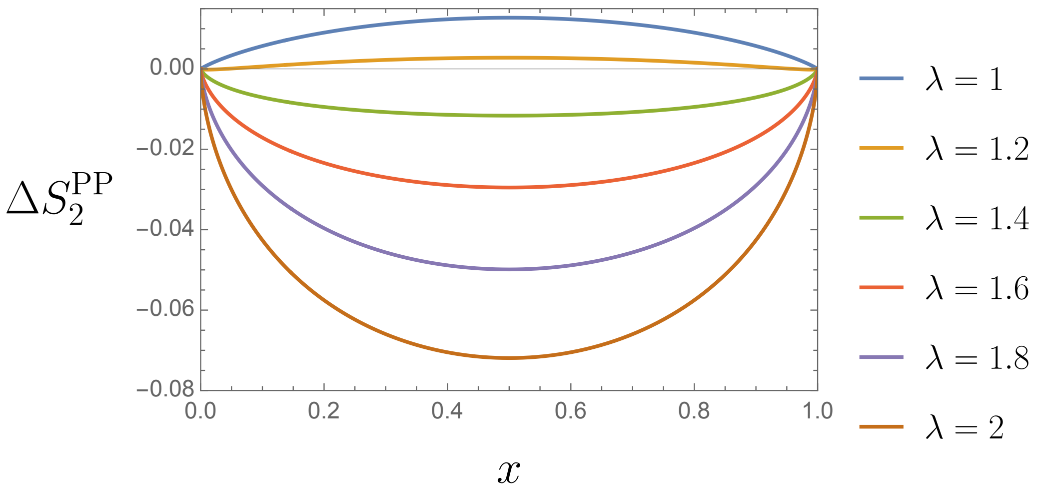
$$\Delta S_2(x) = S_2(V,\lambda) - S_2(V,0)$$

ERE

Small λ



Large λ



Single interval, CFT [Holzhey et al 1994]

$$S_n = \frac{c}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{v-u}{\epsilon}\right)$$

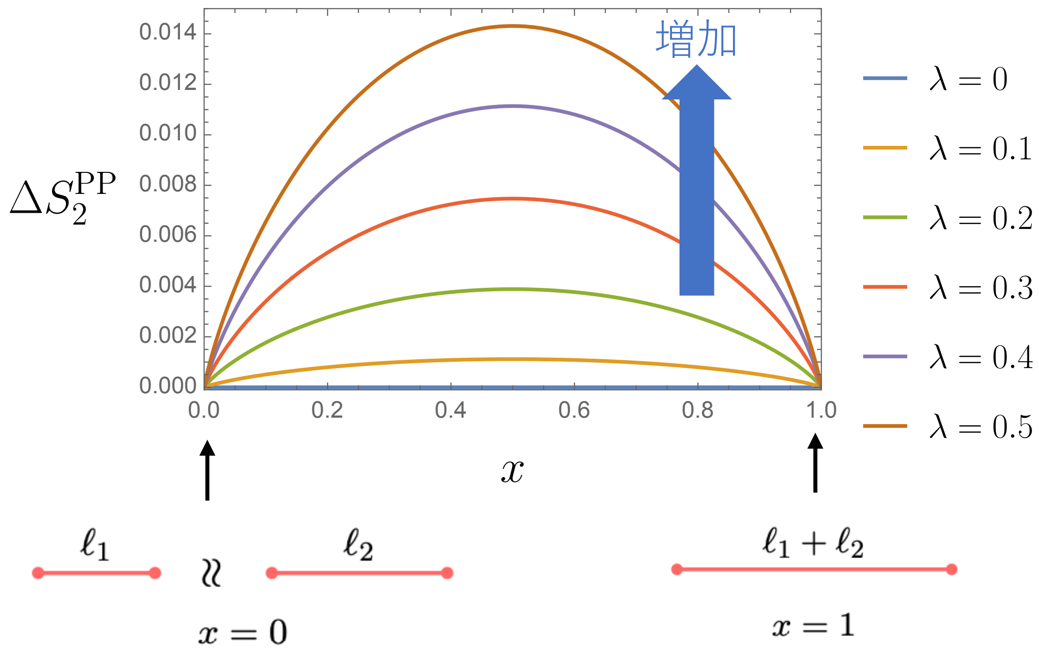
c : central charge,
ϵ : UV cutoff

既存の結果とconsistentな振る舞い

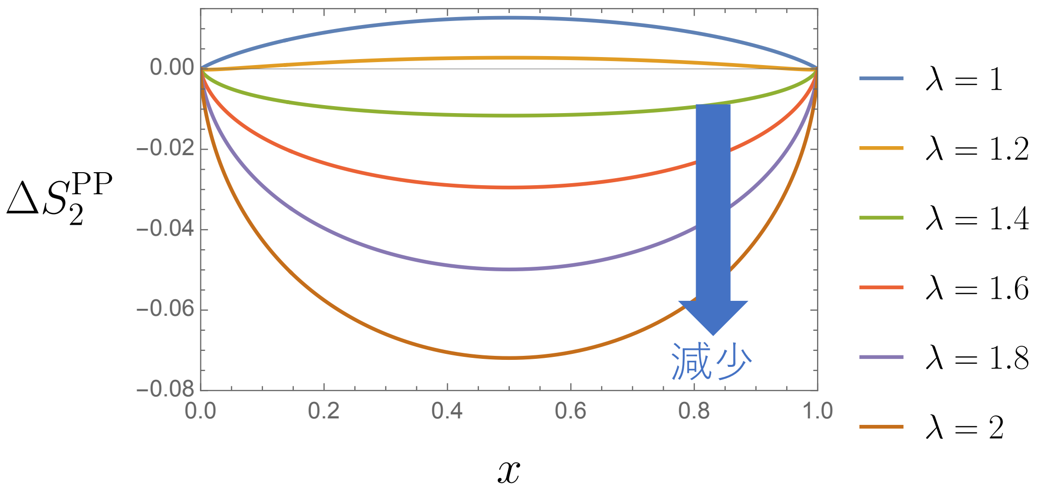
$$\Delta S_2(x) = S_2(V,\lambda) - S_2(V,0)$$

ERE

Small λ



Large λ



Single interval, CFT [Holzhey et al 1994]

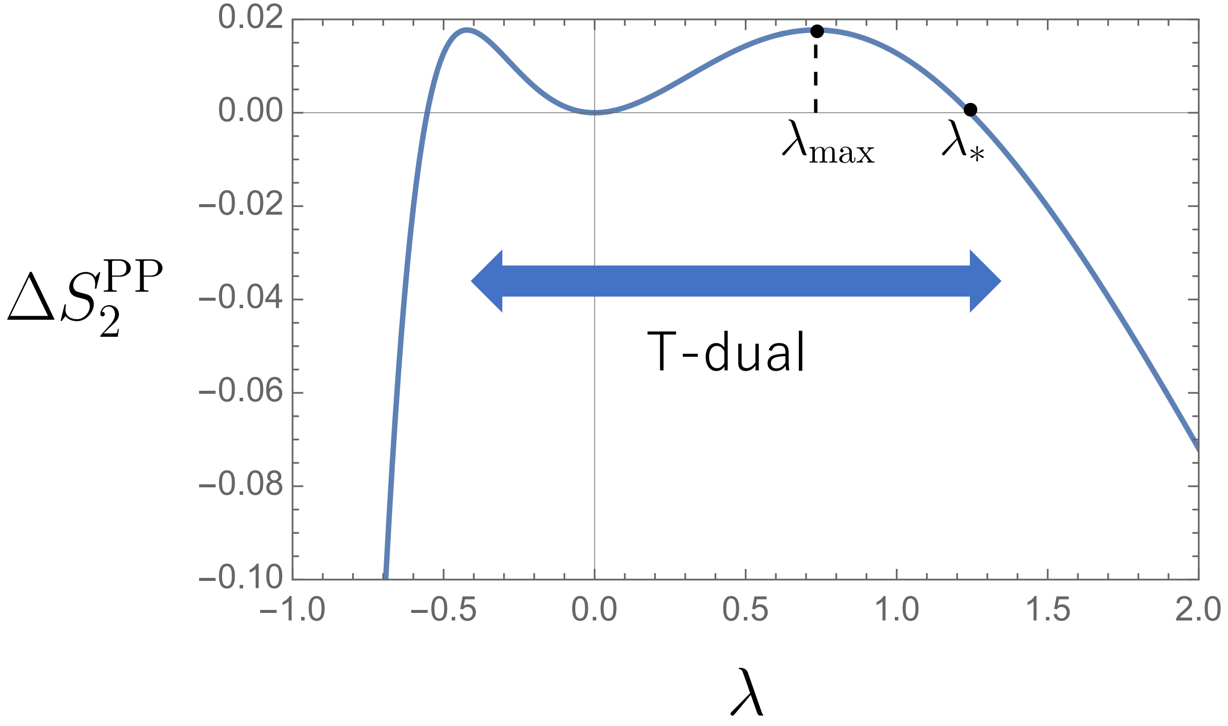
$$S_n = \frac{c}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{v-u}{\epsilon}\right)$$

c : central charge,
ϵ : UV cutoff

既存の結果とconsistentな振る舞い

3. Rényiエントロピーの結合定数依存性

ERE at $x = \frac{1}{2}$



Compact bosonのT-duality：

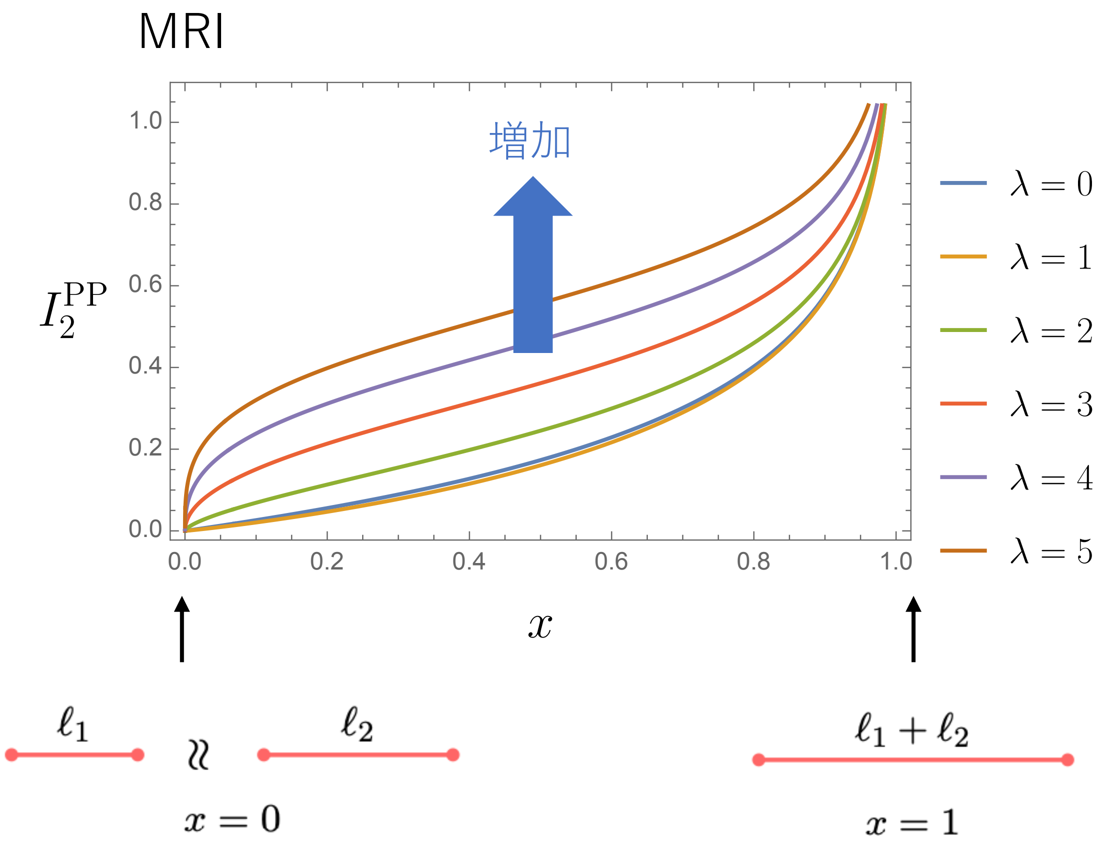
$$R \to \frac{2}{R}$$

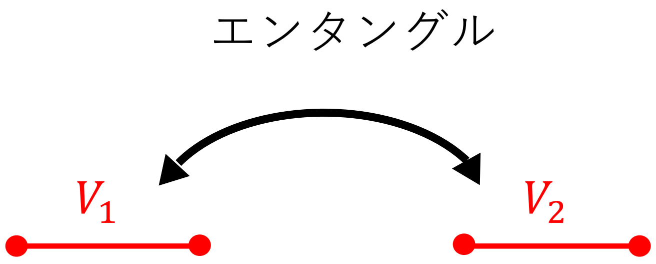
$$\lambda \to \lambda_{\mathrm{dual}} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

$\lambda > 0$と$\lambda < 0$は互いに対応している

結合定数λが十分大きいとEREは減少する

$$\text{MRI}：I_n(V_1, V_2) = S_n(V_1) + S_n(V_2) - S_n(V_1 \cup V_2)$$

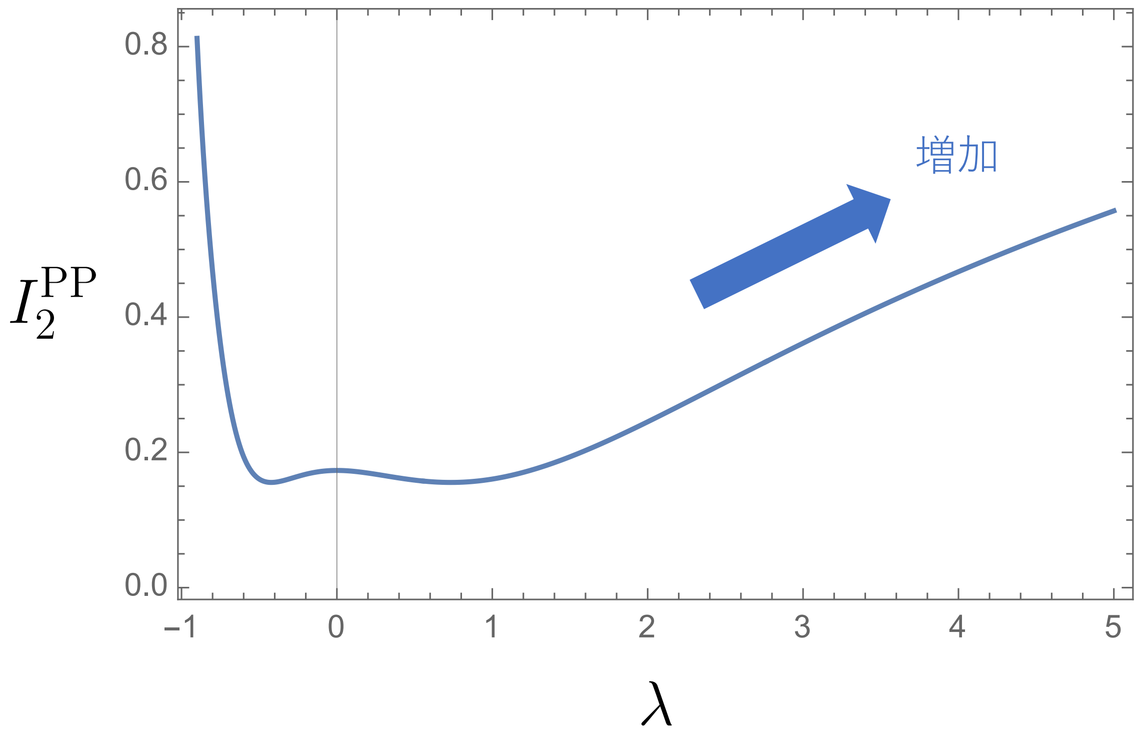




reasonableな結果

3.相互Rényi情報量の結合定数依存性

MRI at $x = \frac{1}{2}$



解析結果からの帰結：

- 相互作用が大きくなるとMRIが増加
- $I_2(V_1, V_2) > 0$

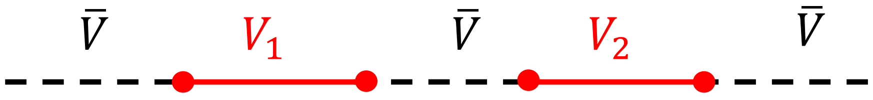
（参考）
$I(V_1, V_2) = S(V_1) + S(V_2) - S(V_1 \cup V_2)$
> 0

4. まとめと展望

4. まとめ

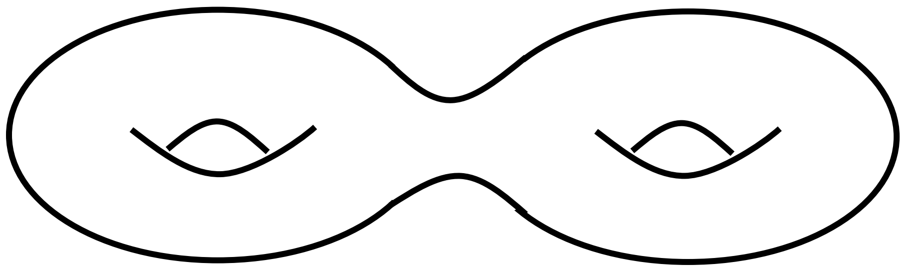
- EREとMRIは理論を特徴付ける重要な量である。
- 我々はReplica法とboson-fermion双対性を用いて相互作用のある系でのRényiエントロピー(ERE)と相互Rényi情報量(MRI)を厳密に計算した。
- 計算結果は既存の結果とconsistentであった。
- 相互作用が十分大きい場合、EREは減少し、MRIは増加することを示した。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \frac{\pi}{2}\lambda\,(\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}\,\gamma_{\mu}\psi)$$



4. 展望

- 3-intervals、3-sheets以上のEREとMRI
- Massive Thirring model
- 他の量子情報量 ➡ 現在研究中
- 数値計算(Tensor network、量子計算)



$m\,\bar{\psi}\,\psi$

$$S_2 = -\log\langle\psi|\otimes\langle\psi|\mathrm{SWAP}_V\,|\psi\rangle\otimes|\psi\rangle$$

Jordan Wigner変換

Thank you.