

場の量子論におけるエンタングルメントと ボソン/フェルミオン双対性

藤村晴伸

*Department of Physics, Osaka University,
Machikaneyama-Cho 1-1, Toyonaka 560-0043, Japan*

ABSTRACT: 量子エンタングルメントは量子論特有の相関であり、量子情報理論のみならず物性理論や場の量子論においても非常に重要な概念である。例えばエンタングルメントエントロピーを調べることによって臨界現象や物質相の情報を引き出すことができる。さらに、ブラックホールのエントロピーに類似した面積則が成り立つことから、エンタングルメントを調べることはホログラフィー原理の理解につながると期待されている。しかし、場の量子論においてエンタングルメントを厳密に計算することは自由場を除き非常に難しいのが現状である。そこで我々はこの問題を解決するためボソン/フェルミオン双対性に注目した。ボソン/フェルミオン双対性とはあるボソンの理論と別のあるフェルミオンの理論との間の双対性である。我々はこのアイデアを用い、相互作用を含むあるモデルに対してエンタングルメント Rényi エントロピーが厳密に計算できる例を示した。さらに結合定数が十分大きい場合、エンタングルメント Rényi エントロピーは減少することを示した。

Contents

1 イントロダクション	2
I ボソン/フェルミオン双対性 (Review)	
2 非自明なサイクルのない多様体上におけるボソン/フェルミオン双対性	6
2.1 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上 massless free fermion	6
2.1.1 対称性と保存カレント	7
2.1.2 正準量子化	7
2.1.3 相関関数	8
2.2 平面 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上の free compact boson	10
2.2.1 対称性と保存カレント	10
2.2.2 正準量子化	11
2.2.3 相関関数	12
2.3 ボソン/フェルミオン双対性の辞書	14
3 非自明なサイクルを持つ多様体上のボソン/フェルミオン双対性	
3.1 2次元 CFT の予備知識	17
3.1.1 共形変換 (2次元)	17
3.1.2 場の変換性	19
3.1.3 トーラスの分配関数	19
3.2 トーラス上の massless free fermion	21
3.2.1 正準量子化	22
3.2.2 トーラス分配関数	23
3.3 トーラス上の compact boson	26
3.3.1 正準量子化	27
3.3.2 \mathbb{Z}^B ゲージ場がある場合	28
3.4 free compact boson / free massless fermion 双対性	33
3.5 ボソン/フェルミオン双対性の辞書	34
3.6 free compact boson model / massless Thirring model	39
II エンタングルメント (Review)	
4 エンタングルメントの基本	43
4.1 導入	43
4.2 エンタングルメントエントロピー	44
4.3 Separable 状態 VS Entangle 状態	48
4.3.1 Separable 状態	48

4.3.2 Entangle 状態	48
4.4 Subadditivity と相互情報量	50
4.5 エンタングルメント Rényi エントロピー	52
5 場の量子論における計算手法：レプリカ法	54
5.1 縮約密度行列 ρ_V の経路積分表示	54
5.2 $\text{Tr}_V [\rho_V^n]$ とレプリカ多様体 Σ_n	60
5.2.1 具体例： $n = 2$	61
5.2.2 具体例： $n = 3$	62
5.2.3 一般の n の場合	63
5.3 ツイスト演算子による方法	64
6 先行研究 1 : massless free fermion	65
6.1 Step 1 : レプリカシートの分離	66
6.2 Step 2 : ボソン/フェルミオン双対性を用いた解析	69
7 先行研究 2 : 領域 V が単連結な場合の CFT_2	74
7.1 レプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ をシリンダーにマップする方法	75
7.2 ツイスト演算子の共形ウェイトを用いる方法	77
III 相互作用を含む場の量子論のエンタングルメント (研究)	80
8 モデルのセッティング	80
9 共形変換	81
9.1 ツイスト演算子の変換性	82
9.2 トーラス分配関数へのマップ	83
10 結果の解析	89
10.1 ERE の解析的性質	89
10.2 MRI の解析的性質	91
10.3 ERE と MRI のパラメーター依存性	92
10.3.1 cross ratio 依存性	92
10.3.2 結合定数依存性	95
10.4 Tripartite Rényi information	96
11 まとめと展望	97
11.1 まとめ	97
11.2 今後の展望	98
A mod 2 index と cup 積に関する公式	100

B ϑ 関数と \wp 関数の公式 100

C Weierstrass のペー関数 102

1 イントロダクション

量子エンタングルメントとは古典的に説明できない量子論特有の相関であり、その相関の大きさを表す量がエンタングルメントエントロピーである。これは量子情報理論を支える基本的な概念であり、幅広い応用の幅を持つ。例えば量子エンタングルメントは量子的な情報の伝達手段である量子テレポーテーションで中心的な役割を果たす[1]。また、次世代の計算手法である量子コンピューティングにおいても量子エンタングルメントはなくてはならない概念である[2]。また、量子情報理論の分野だけでなく、物性物理や場の量子論においても量子エンタングルメントは重要な概念である。例えばエンタングルメントエントロピー調べることにより、物質相の構造や臨界現象における臨界指数といった重要な情報を引き出すことができる[3–6]。このように、量子エンタングルメントは現代物理学において非常に重要な概念である。

また、場の量子論においても量子エンタングルメントはホログラフィー原理の研究で重要な役割を果たしている。これについては少し詳しく述べよう。場の量子論は特殊相対性理論と量子論を含む一般的な理論であり、素粒子論の基本的かつ重要な理論である。素粒子論の最終目標は全ての物理現象を説明する究極の理論を作ることにあろう。しかし現状では重力と量子論の統合は未だ完全な形ではない。量子重力理論の研究において重要な概念がホログラフィー原理である。ホログラフィー原理は以下のブラックホールエントロピーの面積則から端を発した[7, 8]。

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G_N} A . \quad (1.1)$$

ここで、 k_B , c , \hbar , G_N , A はそれぞれボルツマン定数、光速、ディラック定数、ニュートン定数、ブラックホールの表面積である（以下、 $k_B = c = \hbar = 1$ の単位系を用いる）。本来、エントロピーは示量性であるため系の体積に比例するはずであるが、この公式はブラックホールのエントロピーが表面積に比例することを主張している。公式の中に熱統計力学、電磁気学、量子力学、相対性理論の基本的な定数が全て入っていることからもこの式は究極の理論を探究する上で非常に重要な手掛かりと言える。この公式がきっかけとなり、「ある時空 \mathcal{M} における重力理論は、その境界 $\partial\mathcal{M}$ における重力を含まない量子論と等価である」というホログラフィー原理が示唆されるようになり、その代表的な具体例が AdS/CFT 対応である[9]。近年、ホログラフィー原理の研究においてエンタングルメントが注目されるきっかけは、以下の Ryu-Takayanagi 公式の発見である[10, 11]。

$$S(V) = \frac{1}{4G_N} A(\gamma_V) . \quad (1.2)$$

ここで、 $S(V)$ はある共形場理論 (CFT) の領域 V に関するエンタングルメントエントロピーであり、 $A(\gamma_V)$ は AdS 時空において領域 V と同じ境界を持つ空間 γ_V の最小面積である。ここで、公式(1.1)と(1.2)を見比べると同じ形をしていることがわかる。このことから量子エンタングルメントは時空の構造を理解する上で重要な手掛かりと考えられ、ホログラフィー原理の研究において新たな切り口を与えた。エンタングルメントエントロピーは量子論で計算可能な量であることから、場の量子論でも研究されている[12, 13]。

ここで、場の量子論におけるエンタングルメントの解析方法について述べよう。エンタングルメントエントロピー (EE) とエンタングルメント Rényi エントロピー (ERE) は以下のように定義される。

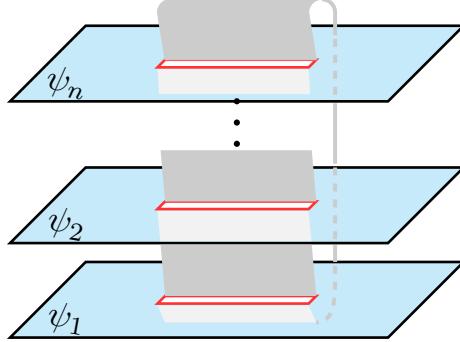
$$S(V) := -\text{Tr}_V [\rho_V \log \rho_V] , \quad (1.3)$$

$$S_n(V) := \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}_V [\rho_V^n] . \quad (1.4)$$

ここで、 ρ_V は領域 V に関する縮約密度行列である。 $S(V)$ は定義から縮約密度行列に関する von-Neumann エントロピーになっており、エンタングルメントの大きさを表す。 $S_n(V)$ は自然数 n を用いた EE の一般化である。もし ERE の定義を $n \in \mathbb{R}$ と拡張し、 $n \rightarrow 1$ の極限を取れば EE に一致する；

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_n(V) = S(V) . \quad (1.5)$$

通常、ERE の方が EE よりも計算しやすいため、まず一般的な n で ERE を計算してから $n \rightarrow 1$ の極限を取ることで EE を求める、というのが常套手段である。場の量子論において一般的な ERE の計算手法はレプリカ法と呼ばれる。レプリカ法では元々の時空を n 個に複製し、適切な境界条件でそれらを繋ぎ合わせる（下図参照）。



そして繋ぎ合わされた時空（レプリカ多様体という）での分配関数 Z_n を計算することにより、ERE を求める。本文で詳しく説明するが、レプリカ法では元々の時空を n 個複製した分、 n 個の場が現れる。特に自由場の場合は“うまい”基底変換が存在するため、見通し良く ERE を計算することができる [12–18]。ところが相互作用があるような系に対してはこのような性質の良い基底変換は一般に存在しないため、レプリカ法を用いた ERE の解析は困難を極める¹。

本修士論文では特に以下の作用で記述される 2 次元の massless Thirring model に着目する；

$$\int d^2x \left[i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{\pi}{2} \lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right] . \quad (1.6)$$

この理論は第 2 項から明らかにようにフェルミオン 4 点結合を含む相互作用がある系である。我々は massless Thirring model の ERE の解析解を厳密に導出し、エンタングルメント構造を調べた。その際、鍵になるのはボソン/フェルミオン双対性である [19]。ボソン/フェルミオン双

¹もちろん結合定数が非常に小さい場合は摂動論を使うことができ、その場合はレプリカ法は有効な解析方法の一つである。

対称性を使うことによって massless Thirring model は free compact boson model と等価であることが知られているため、読者の中には massless Thirring model の ERE は容易に導出できると思う者もいるだろう。ところが領域 V が非連結である時、レプリカ多様体は一般に非自明なサイクルを持つ。例えば、領域 V が二つの連結な領域から成る場合、レプリカ多様体は共形変換によってトーラスと結びつく。そのような場合はもちろん局所的な演算子の対応は成立するが、それだけでは両理論が完全に等価であると結論付けることはできない。そこで近年、トーラスのような非自明なサイクルを持つような多様体上でボソン理論とフェルミオン理論がどのように対応するかの議論が精密になされた [20, 21]。彼らの結果によると、2次元のボソン理論 \mathcal{T}_B がアノマリーのない大域的対称性 \mathbb{Z}_2^B を持つとき、対応するフェルミオン理論 \mathcal{T}_F とボソン理論 \mathcal{T}_B の関係は模式的に以下のように書かれる；

$$\mathcal{T}_F = \frac{\mathcal{T}_B \times \text{Kitaev}}{\mathbb{Z}_2^B}, \quad (1.7)$$

ここで、 $\mathcal{T}_B \times \text{Kitaev}$ は元のボソン理論 \mathcal{T}_B に2次元位相論的場の理論 (TQFT) Kitaev を結合させることを意味する。また、 \mathbb{Z}_2^B で“割る”とは \mathbb{Z}_2^B 対称性でゲージ化することを表す。(これらの概念は本文中で詳しく解説する。) 例えれば TQFT Kitaev は \mathbb{R}^2 のような非自明なサイクルを持たないような多様体に対しては自明になるが、トーラスのような多様体の場合は非自明になる。我々はこの公式 (1.7) を非自明なサイクルを持つレプリカ多様体上の場の量子論に適用することにより、massless Thirring model の ERE の厳密な表式を非摂動的に導出した。さらに得られた結果を用いて massless Thirring model のエンタングルメント構造の解析を行った。

この修士論文は大きく分けて三つのパートから構成されている。まずパート I では本研究で最も重要な概念の一つであるボソン/フェルミオン双対性をレビューを行う。セクション 2 では2次元平面上の massless free fermion と free compact boson model を例に取りながらボソン/フェルミオン双対性の入門的な導入を行う。また、セクション 3.5 でそれを拡張し、非自明なサイクルをもつ多様体上のボソン/フェルミオン双対性をレビューする。また、ボソン/フェルミオン双対性の応用としてトーラス上の massless Thirring model を扱う。次に、パート II では本研究のもう一つの重要な概念であるエンタングルメントをレビューする。セクション 4 では量子力学からエンタングルメントの基礎知識を解説し、セクション 5 では、場の量子論におけるエンタングルメントの計算手法であるレプリカ法をレビューする。そして、6, 7 では本研究にとって重要な先行研究を2つレビューする。そしてパート III ではいよいよ研究内容を述べる。まずセクション 8 で具体的な問題設定を行い、セクション 9 で解析に必要な共形変換を述べる。セクション 10 では本研究のメインの結果である massless Thirring model のエンタングルメント Rényi エントロピーを導出し、領域 V の形状と Thirring coupling 依存性を議論する。最後のセクション 11 ではこの修士論文の内容をまとめ、本研究の今後の展望を述べる。

また、この修士論文では以下のようないわゆる水色のボックスを用いる。

(重要な項目)

~~~~~

次に、以下のオレンジバーは補足説明や例、証明などに用いる。もし、説明を読んで「はいはい分かる分かる」となった場合はオレンジバーの記事は読む必要はない。もし「ん? どういうことかな?」となった場合や証明に興味がある場合は読むと良い。

補足説明

具体例

証明など

最後に、以下のグレーのボックスは数学的な定理や知られている事実を述べる際に用いる。

(数学的な定理)

(知られている事実)

~~~~~

このようなグレーのボックスの記事は証明にこだわらず事実として認めると良い。

Part I

ボソン/フェルミオン双対性(Review)

このパートではこの修士論文で重要な役割を果たすボソン/フェルミオン双対性についてレビューする。ボソン/フェルミオン双対性は時空の非自明なサイクルの有無によって話が異なる。そこで、セクション 2 では 2 次元平面上の massless free fermion と free compact boson を例に取りながら時空に非自明なサイクルがない場合のボソン/フェルミオン双対性について解説する。次にセクション 3 では非自明なサイクルがある時空の例としてトーラスを扱い、最後に、一般的に成り立つ非自明なサイクルがある場合のボソン/フェルミオン双対性について解説する。

2 非自明なサイクルのない多様体上におけるボソン/フェルミオン双対性

2.1 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上 massless free fermion

ボソン/フェルミオン双対性が成り立っていることを理解するため、具体例として 2 次元の massless free fermion を扱ってみよう。このセクションの内容は割と教科書的ではあるが、この修士論文で重要な部分だけに絞り概要をまとめた。はじめに、作用は以下のように与えられる。

$$S = \int_{\mathbb{R}^{1,1}} dx dt i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi , \quad (2.1)$$

ここで、計量は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ とした。また $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$ は ψ の Dirac 共役である。さらに、 $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1$ を満たすガンマ行列の具体形として、以下を用いるとする。

$$\gamma^0 = \sigma^x , \gamma^1 = i\sigma^y , \gamma^5 = -\gamma^0 \gamma^1 = \sigma^z , \quad (2.2)$$

ここで、 σ^x , σ^y , σ^z はパウリ行列である。 γ^5 は 4 次元で出てくる γ^5 の 2 次元バージョンだが、同じ記号 γ^5 を用いた。また、今 $\gamma^5 = \sigma^z$ より、Dirac 場 ψ を chiral fermion ψ_\pm (γ^5 の固有値 ± 1 の固有状態) で以下のように書くとする；

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

これを用いると作用は以下のように書き直せる。

$$S = \int dt dx i \left(\psi_+^\dagger (\partial_0 - \partial_1) \psi_+ + \psi_-^\dagger (\partial_0 + \partial_1) \psi_- \right) . \quad (2.4)$$

この作用を ψ_\pm について変分を取ると、運動方程式は

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \partial_1) \psi_- &= 0 \\ (\partial_0 - \partial_1) \psi_+ &= 0 , \end{aligned} \quad (2.5)$$

となり、このことから ψ_- が右向きに進む波、 ψ_+ が右向きに進む波であることがわかる；

$$\begin{aligned} \psi_- &= \psi_-(x-t) : \text{right-moving} \rightarrow \\ \psi_+ &= \psi_+(x+t) : \text{left-moving} \leftarrow . \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.1 対称性と保存カレント

さて、このモデルの対称性について確認しよう。作用 (3.19) を見てすぐにわかるように、このモデルには $U(1)$ 対称性とそれに付随する vector current j^μ がある。

$$U(1) : \psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.7)$$

また、今回 massless であるので、 $U_A(1)$ の対称性もあり、同様に axial vector current j_A^μ が存在する。

$$U_A(1) : \psi' = e^{i\alpha\gamma^5}\psi, \quad j_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \quad (2.8)$$

$U_A(1)$ 対称性について

読んでる人は知ってると思うが、念の為。 $U_A(1)$ 対称性は massless の時に成り立つ。というのも、この $U_A(1)$ 変換の元、 $\bar{\psi}$ は以下のように変換する。

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 = \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 e^{i\alpha\gamma^5} = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma^5}. \quad (2.9)$$

ここで、 $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ を用いた。これより、質量項 $\bar{\psi}\psi$ は $U_A(1)$ 変換で $\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}e^{2i\alpha\gamma^5}\psi$ となるので不变ではないことがわかる。一方、運動項は

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma^5}\gamma^\mu e^{i\alpha\gamma^5}\partial_\mu\psi = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma^5}e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad (2.10)$$

となり、不变である。途中の変形では $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ を用いた。

また、この $U_A(1)$ 対称性に付随する保存カレント j_A^μ は Noether の定理から導ける。

今後のためこの 2 つの保存カレント j^μ, j_A^μ の関係式を書いておこう。今回の計量では以下の式が成り立つ。

$$j_A^\mu = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu. \quad (2.11)$$

ここで、 $\epsilon^{01} = 1$ とした。この関係式は 2 次元特有のものであり、後でボソン側を議論する際に重要となる。

(2.11) の証明

成分ごとに書くと割とすぐわかる。 j_A^μ と γ^5 の定義より、

$$\begin{aligned} j_A^0 &= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi = -\bar{\psi}\underbrace{(\gamma^0)^2}_{=1}\gamma^1\psi = -\bar{\psi}\gamma^1\psi = -j^1 = j_1, \\ j_A^1 &= \bar{\psi}\gamma^1\gamma^5\psi = -\bar{\psi}\gamma^1\gamma^0\gamma^1\psi = \bar{\psi}\gamma^0\underbrace{(\gamma^1)^2}_{=-1}\psi = -\bar{\psi}\gamma^0\psi = -j^0 = -j_0, \end{aligned}$$

よって、(2.11) が成り立つ。

2.1.2 正準量子化

それではこのモデルに対して正準量子化を行ってみよう。運動方程式の解は (2.6) で求めてある。これを Fourier 変換し、係数を演算子に格上げすることによって以下のように mode 展開

できる²。

$$\begin{aligned}\psi_-(x, t) &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \left(b_p^{(-)} e^{ip(x-t)} + c_p^{(-)\dagger} e^{-ip(x-t)} \right) \\ \psi_+(x, t) &= \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{2\pi} \left(b_p^{(+)} e^{ip(x+t)} + c_p^{(+)\dagger} e^{-ip(x+t)} \right).\end{aligned}\quad (2.12)$$

ここで、 $b_p^{(-)}$, $b_p^{(+)}$ は消滅演算子、 $c_p^{(-)\dagger}$, $c_p^{(+)\dagger}$ は生成演算子で、以下の交換関係を満たす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\psi_\pm(x, t), \psi_\pm^\dagger(y, t)\} = \delta(x - y) \\ (\text{それ以外}) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \{b_p^{(\pm)}, b_q^{(\pm)\dagger}\} = 2\pi\delta(p - q) \\ \{c_p^{(\pm)}, c_q^{(\pm)\dagger}\} = 2\pi\delta(p - q) \\ (\text{それ以外}) = 0 \end{array} \right.. \quad (2.13)$$

(2.13) の証明

これも基本的なことであるが、一応確認。 \Leftarrow も \Rightarrow も似たような計算で示せる。ここでは (2.13) 右辺 $\Rightarrow \{\psi_-(x, t), \psi_-^\dagger(y, t)\} = \delta(x - y)$ だけ示す。スペース削減のため $t = 0$ で計算する。(2.12) より、

$$\begin{aligned}\{\psi_-(x, 0), \psi_-^\dagger(y, 0)\} &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \left\{ b_p^{(-)} e^{ipx} + c_p^{(-)\dagger} e^{-ipx}, b_q^{(-)\dagger} e^{-iqy} + c_q^{(-)} e^{iqy} \right\} \\ &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \left(\underbrace{\{b_p^{(-)}, b_q^{(-)\dagger}\}}_{=2\pi\delta(p-q)} e^{i(px-qy)} + \underbrace{\{b_p^{(-)}, c_q^{(-)}\}}_{=0} e^{i(px+qy)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\{c_p^{(-)\dagger}, b_q^{(-)\dagger}\}}_{=0} e^{-i(px+qy)} + \underbrace{\{c_p^{(-)\dagger}, c_q^{(-)}\}}_{=2\pi\delta(p-q)} e^{-i(px-qy)} \right) \\ &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \left(e^{ip(x-y)} + e^{-ip(x-y)} \right) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-y)} \\ &= \delta(x - y).\end{aligned}\quad (2.14)$$

よって、 $\{\psi_-(x, 0), \psi_-^\dagger(y, 0)\} = \delta(x - y)$ が示せた。他の交換関係も同様に示せる。

2.1.3 相関関数

ここでは場の量子論において重要な物理量である相関関数をいくつか求めよう。真空状態 $|0\rangle$ を以下の式を満たすものとして定義する。

$$b_p^{(\pm)} |0\rangle = c_p^{(\pm)} |0\rangle = 0, \quad \text{for all } p \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

²積分範囲が \int_0^∞ , $\int_{-\infty}^0$ となっていることが気になる人がいるかもしれないが、これは単に convention である。単に $\int_{-\infty}^\infty dp b_p e^{ipx} = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^\infty \right) dp b_p e^{ipx}$ と分けて、 $c_p^\dagger := b_{-p}$ とすれば (2.12) になる。 b_p, c_p はそれぞれ粒子、反粒子の annihilation op と一致する。

これより、真空状態における 2 点相関関数は以下のように計算される³。

$$\begin{aligned}\langle \psi_-(x, t) \psi_-^\dagger(y, t) \rangle &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x-y}, \\ \langle \psi_+^\dagger(x, t) \psi_+(y, t) \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x-y}, \\ (\text{それ以外}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Proof. 積分の収束性を良くするため UV cutoff ϵ を導入する。mode 展開 (2.12) に $e^{-\frac{\epsilon}{2}|p|}$ の factor を"手で"入れ以下のように修正する。

$$\begin{aligned}\psi_-(x, t) &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \left(b_p^{(-)} e^{ip(x-t)} + c_p^{(-)\dagger} e^{-ip(x-t)} \right) e^{-\frac{\epsilon}{2}p} \\ \psi_+(x, t) &= \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{2\pi} \left(b_p^{(+)} e^{ip(x+t)} + c_p^{(+)\dagger} e^{-ip(x+t)} \right) e^{-\frac{\epsilon}{2}|p|}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

この mode 展開を用いて相関関数を実際に計算してみよう。まずは $\langle \psi_-(x, t) \psi_-^\dagger(y, t) \rangle$ を考える。真空の定義 (2.15) より、

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi_-(x, t) \rangle &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \langle 0 | b_p^{(-)} e^{-p(\frac{\epsilon}{2}-i(x-t))}, \\ \psi_-^\dagger(y, t) | 0 \rangle &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \langle 0 | b_p^{(-)\dagger} e^{-p(\frac{\epsilon}{2}+i(y-t))},\end{aligned}\tag{2.18}$$

となる。交換関係 (2.13) を用いて相関関数を計算すると、

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi_-(x, t) \psi_-^\dagger(y, t) | 0 \rangle &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \langle 0 | \underbrace{b_p^{(-)} b_q^{(-)\dagger}}_{2\pi\delta(p-q)-b_q^{(-)\dagger}b_p^{(-)}} | 0 \rangle e^{-p(\frac{\epsilon}{2}-i(x-t))} e^{-q(\frac{\epsilon}{2}+i(y-t))} \\ &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-p(\epsilon-i(x-y))} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-\epsilon+i(x-y)} e^{-p(\epsilon-i(x-y))} \right]_{p=0}^{p=\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon-i(x-y)}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

この式で $\epsilon \rightarrow 0$ とすると、 $\langle \psi_-(x, t) \psi_-^\dagger(y, t) \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x-y}$ が導かれる。また、 $\langle \psi_+(x, t) \psi_+^\dagger(y, t) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x-y}$ や、それ以外の 2 点関数がゼロになることも同様に示せる。□

³massless free fermion は CFT なので、共形対称性の観点からも (二点関数) $\sim (x-y)^{-1}$ とならなければならぬ。

2.2 平面 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上の free compact boson

次に、平面 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上の free compact boson を考えてみよう。実はこのモデルは先ほど議論した massless free fermion と双対であることが知られている。このセクションでは具体的にボソン側がフェルミオン側とどのように対応しているかを確かめる。Free compact boson の作用は以下で与えられる。

$$S = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^{1,1}} dt dx \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad \phi \in [0, \pi) . \quad (2.20)$$

ここで、場 ϕ が $0 \sim 2\pi$ の値を取ることに注意。この作用より、運動方程式は以下の通り。

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi = (\partial_0 - \partial_1)(\partial_0 + \partial_1)\phi = 0 . \quad (2.21)$$

これより、運動方程式の解は以下のように right-moving な場 $\phi_-(x-t)$ と left-moving な場 $\phi_+(x+t)$ の和で書ける。

$$\phi(x, t) = \phi_+(x+t) + \phi_-(x-t) . \quad (2.22)$$

この場 ϕ_\pm は fermion の場 ψ_\pm と関数形が似ているため、chiral boson と呼ぶとする。また、後の計算の都合上、以下の関係式を満たす dual boson $\tilde{\phi}$ を定義しておく。

$$\partial^\mu \phi = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\phi} \Leftrightarrow \partial_0 \phi = \partial_1 \tilde{\phi}, \quad \partial_1 \phi = \partial_0 \tilde{\phi} . \quad (2.23)$$

(2.22) から dual boson $\tilde{\phi}$ は以下のように書ける。

$$\tilde{\phi}(x, t) = \phi_+(x+t) - \phi_-(x-t) . \quad (2.24)$$

このことから ϕ_\pm は $\phi, \tilde{\phi}$ を用いて以下のように書ける。

$$\phi_\pm = \frac{1}{2} (\phi \pm \tilde{\phi}) . \quad (2.25)$$

後で述べるが、この chiral boson ϕ_\pm がそれぞれ chiral fermion ψ_\pm と関係付けられる。

2.2.1 対称性と保存カレント

このモデルにおいても対称性とその保存カレントを確認しておこう。作用 (2.20) には $\partial\phi$ の項しかないので、以下の shift 対称性とその保存カレントが存在する。

$$\text{shift : } \phi' = \phi + \alpha, \quad j_B^\mu = \frac{1}{8\pi} \partial^\mu \phi . \quad (2.26)$$

Proof. 運動方程式から $\partial_\mu j_B^\mu = \frac{1}{8\pi} \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$ なので確かに保存量になっている。また、Noether の定理からこれが shift 対称性に付随する保存カレントであることがわかる。微小変換 $\delta\phi = \phi' - \phi = \delta\alpha$ として Noether カレントを求める

$$j_B^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \cdot \frac{\delta \phi}{\delta \alpha} = \frac{1}{8\pi} \partial^\mu \phi , \quad (2.27)$$

となる。 □

また、これとは別に自明に保存するカレント \tilde{j}_B^μ が存在する。

$$\tilde{j}_B^\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = \frac{1}{8\pi} \partial^\mu \tilde{\phi} . \quad (2.28)$$

($\epsilon^{\mu\nu}$ が反対称であることからすぐに $\partial_\mu \tilde{j}_B^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi / (8\pi) = 0$ となる) この保存カレント \tilde{j}_B^μ と shift 対称性のカレント j_B^μ の関係にある。

$$j_B^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \tilde{j}_{B,\mu} . \quad (2.29)$$

この式に見覚えはないだろうか？ そう、 fermion の時に出てきた vector current と axial vector current の関係式 (2.11) と同じ格好をしている。実際にボソン/フェルミオン双対性で $j_B^\mu \leftrightarrow j_A^\mu$, $\tilde{j}_B^\mu \leftrightarrow j^\mu$ の対応があることが知られている。このことについては後で詳しく示す。

2.2.2 正準量子化

それではこのモデルでも正準量子化を行ってみよう。まずは場 $\phi(x, t)$ を Fourier 変換しよう。

$$\phi(x, t) = \int dp \phi(p, t) e^{ipx} . \quad (2.30)$$

これを運動方程式 (2.21) に代入すると、 $\ddot{\phi}(p, t) + p^2 \phi(p, t) = 0$ を得る。この解は $\phi(p, t) = \phi_1(p) e^{i\omega_p t} + \phi_2(p) e^{-i\omega_p t}$, $\omega_p = |p|$ 。これを Fourier 変換の式に戻すと、

$$\phi(x, t) = \int dp \left(\phi_1(p) e^{i(px + \omega_p t)} + \phi_2(p) e^{i(px - \omega_p t)} \right) \quad (2.31)$$

今実スカラー場を考えているので $\phi(x, t) = \phi^\dagger(x, t)$ を満たさないといけない。よって、 $\phi_1(p) = \phi_2^\dagger(-p)$ を満たす。よって、

$$\phi(x, t) = \int dp \left(\phi_2^\dagger(p) e^{i(-px + \omega_p t)} + \phi_2(p) e^{i(px - \omega_p t)} \right) \quad (2.32)$$

最後に、正準量子化を行うためこの係数 $\phi_2^\dagger(p)$, $\phi_2(p)$ を適当な規格化定数を入れて演算子に格上げすることにより以下の mode 展開を得る⁴。

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} \left(a_p e^{i(px - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)} \right) \\ \pi(x, t) = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sqrt{\frac{\omega_p}{2\pi}} \left(a_p e^{i(px - \omega_p t)} - a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)} \right) . \end{cases} \quad (2.33)$$

ここで、共役運動量を $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \frac{1}{4\pi} \dot{\phi}$ とした。 a_p , a_p^\dagger はそれぞれ消滅・生成演算子である。また、交換関係は以下の通り。

$$\begin{cases} [\phi(x, t), \pi(y, t)] = i\delta(x - y) , \\ (\text{それ以外}) = 0 , \end{cases} \iff \begin{cases} [a_p, a_q^\dagger] = 2\pi\delta(p - q) , \\ (\text{それ以外}) = 0 . \end{cases} \quad (2.34)$$

⁴ 厳密なことを言うと、 ϕ の mode 展開は $p = 0$ で ambiguity がある。なので、人々はよく zero mode ($p = 0$ のモード)だけ分けて mode 展開の式に書く。少なくともこのセクションでは zero mode が重要とならないので省略している。

Proof. \Leftarrow だけ示す (\Rightarrow の証明はほとんど同じような計算である)。どんな教科書にも載っているようなことだけど、きちんと復習しておこう。mode 展開 (2.33) より、

$$\begin{aligned}
[\phi(x, t), \pi(y, t)] &= \frac{-i}{2} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}} \left[a_p e^{i(px - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)}, a_q e^{i(qy - \omega_q t)} - a_q^\dagger e^{-i(qy - \omega_q t)} \right] \\
&= \frac{-i}{2} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}} \left(- \underbrace{[a_p, a_q^\dagger]}_{=2\pi\delta(p-q)} e^{i(px - qy)} + \underbrace{[a_p^\dagger, a_q]}_{=-2\pi\delta(p-q)} e^{-i(px - qy)} \right) \\
&= \frac{i}{2} \int \frac{dp}{2\pi} \left(e^{i(px - qy)} + e^{-i(px - qy)} \right) \\
&= \delta(x - y) . \tag{2.35}
\end{aligned}$$

よって、(2.2.2) の \Leftarrow が示せた。 \square

また、 ϕ_\pm の mode 展開も求めておこう。それにはまず dual field $\tilde{\phi}$ の mode 展開を求める。 $\partial_1 \tilde{\phi}(x, t) = \dot{\phi} = 4\pi \pi(x, t)$ より、 $\tilde{\phi}(x, t)$ は $\pi(x, t)$ を空間積分すること得られる。

$$\tilde{\phi}(x, t) = 4\pi \int_{-\infty}^x dx' \pi(x', t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} \cdot \frac{|p|}{p} \left(a_p e^{i(px - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)} \right) \tag{2.36}$$

ϕ と $\tilde{\phi}$ の mode 展開 (2.33), (2.36) を (2.25) に代入すると、chiral boson ϕ_\pm の mode 展開を得る。

$$\begin{cases} \phi_-(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} \left(a_p e^{i(px - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)} \right), \\ \phi_+(x, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} \left(a_p e^{i(px - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)} \right) . \end{cases} \tag{2.37}$$

この式と fermion の mode 展開 (2.17) を見るとよく似ていることがわかり、この式からも $\psi_+ \leftrightarrow \phi_+$, $\psi_- \leftrightarrow \phi_-$ の対応がありそうだな、と予想できる。より具体的な対応は sec 2.3 で述べる。

2.2.3 相関関数

先ほど得られた mode 展開を用いて chiral boson の 2 点相関関数を計算してみよう。今回も真空 $|0\rangle$ を以下のように定義する。

$$a_p |0\rangle = 0, \text{ for all } p \in \mathbb{R} . \tag{2.38}$$

また、この真空を用いて 2 点相関関数を計算すると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x, t) \phi(y, t) \rangle &= -2 \log |x - y| , \\
\langle \phi_\pm(x, t) \phi_\pm(y, t) \rangle &= \log \left(\frac{\pm 1}{i(x - y)} \right) , \\
(\text{それ以外}) &= 0 . \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Proof. 今回も積分の収束性を良くするため、(2.37) の mode 展開に UV cutoff を手で入れ修正する。

$$\begin{cases} \phi_-(x, t) = \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} (a_p e^{i(px - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)}) e^{-\frac{\epsilon}{2}\omega_p}, \\ \phi_+(x, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} (a_p e^{i(px - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)}) e^{-\frac{\epsilon}{2}\omega_p}. \end{cases} \quad (2.40)$$

この mode 展開を用いて $\langle 0 | \phi_-(x, t) \phi_-(y, t) | 0 \rangle$ を計算すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_-(x, t) \phi_-(y, t) | 0 \rangle &= \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{2\pi\omega_q}} e^{-\frac{\epsilon}{2}(\omega_p + \omega_q)} \underbrace{\langle 0 | a_p a_q^\dagger | 0 \rangle}_{=2\pi\delta(p-q)} e^{i(px - \omega_p t)} e^{-i(qy - \omega_q t)} \\ &= \int_0^\infty \frac{dp}{p} e^{-(\epsilon - i(x-y))p}. \end{aligned}$$

この式に $\int_0^\infty dp e^{-\alpha p} = \frac{1}{\alpha}$ の両辺を α 積分することにより得られる式 $\int_0^\infty \frac{dp}{p} e^{-\alpha p} = -\log \alpha$ を用いると、

$$\langle 0 | \phi_-(x, t) \phi_-(y, t) | 0 \rangle = \log \left(\frac{1}{\epsilon - i(x-y)} \right), \quad (2.41)$$

となる。最後に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ると (2.39) を得る。 $\langle 0 | \phi_+(x, t) \phi_+(y, t) | 0 \rangle$ やそれ以外も同様に示せる。□

この相関関数の関数形を見ると fermion の相関関数 (2.16) とちょうど \exp ぐらい違うことが読み取れる。そこで、以下の vertex operator を導入しよう。

$$:e^{i\alpha\phi(x,t)}: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} :\phi(x, t)^n:. \quad (2.42)$$

ここで、:(#): は normal ordering と呼ばれ、以下のように生成演算子が左に来るよう演算子の順番を入れ替える意味を持つ。

$$:(a_{p_1} a_{p_2} a_{q_1}^\dagger a_{q_2}^\dagger a_{p_3} \cdots): \equiv a_{q_1}^\dagger a_{q_2}^\dagger a_{p_1} a_{p_2} a_{p_3} \cdots. \quad (2.43)$$

この vertex operator の相関関数を計算すると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle :e^{i\phi_\pm(x,t)}: :e^{-i\phi_\pm(y,t)}: \rangle &= \langle :e^{i\phi_\pm(x,t) - i\phi_\pm(y,t)}: \rangle e^{\langle \phi_\pm(x,t) \phi_\pm(y,t) \rangle} \\ &= \frac{\pm 1}{i(x-y)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

計算では Baker-Hausdorf の公式を用いた。

Proof. 場 $\phi_{\pm}(x, t), \phi_{\pm}(y, t)$ の代わりに以下の演算子 A, B を考えよう。証明の本質は変わらない。

$$A = \alpha a + \beta a^\dagger, \quad B = \gamma a + \delta a^\dagger. \quad (2.45)$$

ここで、ギリシャ文字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はただの数、 a^\dagger, a は生成・消滅演算子である。Normal ordering の性質より、vertex operator の積は以下のように変形できる。

$$:e^A: :e^B: = e^{\beta a^\dagger} e^{\alpha a} e^{\delta a^\dagger} e^{\gamma a} \quad (2.46)$$

ここで、 $[A, B]$ がただの数の時の Baker-Hausdorff の公式 $e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]}$ を用いると、

$$\begin{aligned} :e^A: :e^B: &= e^{\beta a^\dagger} e^{\delta a^\dagger} e^{\alpha a} \underbrace{e^{[\alpha a, \delta a^\dagger]}}_{=e^{\alpha \delta}} e^{\gamma a} \\ &= e^{\beta a^\dagger} e^{\delta a^\dagger} e^{\alpha a} e^{\gamma a} e^{\alpha \delta} \\ &= :e^{A+B}: e^{\langle AB \rangle}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

最後の変形では $\langle AB \rangle = \langle \alpha a \delta a^\dagger \rangle = \alpha \delta$ を用いた。同様の式が多変数の場合にも成り立つので、 $A \rightarrow i\phi_{\pm}(x, t), B \rightarrow -i\phi_{\pm}(y, t)$ と拡張すれば (2.44) が成り立つ。□

2.3 ボソン/フェルミオン双対性の辞書

このセクションでは前節の答えを参照しながらボソン/フェルミオン双対性の辞書を導入する。セクション 2.1 と 2.2 の解析結果を見ると、たびたび boson と fermion の対応関係をほのめかす結果があったと思う。類似している点を列挙すると、

- fermion の保存カレントの関係式 $j_A^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$ と boson 側の関係式 $j_B^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \tilde{j}_{B,\mu}$
- chiral fermion ψ_{\pm} の mode 展開 (2.12) と chiral boson ϕ_{\pm} の mode 展開 (2.37)
- fermion の相関関数 (2.16) と boson の vertex operator の相関関数 (2.44)

のことから、chiral fermion ψ_{\pm} と chiral boson ϕ_{\pm} は対応していることが予想できる。fermion の相関関数 (2.16) と boson の vertex operator の相関関数 (2.44) の類似性から定数倍も含めて比較すると、以下の対応関係が読み取れる。

$$\begin{cases} \psi_-(x, t) \iff \frac{1}{\sqrt{2\pi}} :e^{i\phi_-(x, t)}:, \\ \psi_+(x, t) \iff \frac{1}{\sqrt{2\pi}} :e^{-i\phi_+(x, t)}:. \end{cases} \quad (2.48)$$

また、この演算子対応関係から、fermion の $U_A(1)$ 対称性 $\psi' = e^{-i\gamma^5 \alpha} \psi \Leftrightarrow \psi'_+ = e^{-i\alpha} \psi_+, \psi'_- = e^{i\alpha} \psi_-$ は boson では shift 対称性 $\phi' = \phi + \alpha$ と対応していることがわかる。さらに、fermion と boson で保存カレントの対応 $j_B^\mu \Leftrightarrow j_A^\mu, \tilde{j}_B^\mu \Leftrightarrow j^\mu$ の対応も見ることができる。実際に計算して

みよう。対応関係 (2.48) を用いると、

$$\begin{aligned}
\psi_\pm^\dagger(x, t)\psi_\pm(x, t) &\iff \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow x} :e^{\pm i\phi_\pm(x, t)}: :e^{\mp i\phi_\pm(y, t)}: \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow x} :e^{\pm i(\phi_\pm(x, t) - \phi_\pm(y, t))}: e^{\langle \phi_\pm(x, t)\phi_\pm(y, t) \rangle} \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow x} :\left(1 \pm i\partial_1\phi_\pm(x, t) \cdot (x - y) + \mathcal{O}((x - y)^2)\right): \frac{\pm 1}{i(x - y)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\pm \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{i(x - y)} + \partial_1\phi_\pm(x, t) \right) .
\end{aligned} \tag{2.49}$$

となる。 $U_A(1)$ カレント j_A^μ を成分ごとに書くと、

$$\begin{aligned}
j_A^0 &= \psi_+^\dagger\psi_+ - \psi_-^\dagger\psi_- , \\
j_A^1 &= -\psi_+^\dagger\psi_+ - \psi_-^\dagger\psi_- .
\end{aligned} \tag{2.50}$$

これに (2.49) の対応関係を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
j_A^0(x, t) &= \lim_{y \rightarrow x} (\psi_+^\dagger(x, t)\psi_+(y, t) - \psi_-^\dagger(y, t)\psi_-(x, t)) , \\
&\iff \frac{1}{2\pi} \underbrace{\partial_1 \tilde{\phi}}_{=\partial_0 \phi} = 4j_B^0 ,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
j_A^1(x, t) &= -\lim_{y \rightarrow x} (\psi_+^\dagger(x, t)\psi_+(y, t) + \psi_-^\dagger(x, t)\psi_-(y, t)) , \\
&\iff -\frac{1}{2\pi} \partial_1 \phi = 4j_B^1 ,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

となる⁵。よって保存カレントに関して以下の対応があることがわかった。

$$j_A^\mu \iff 4j_B^\mu . \tag{2.53}$$

次に、 $U(1)$ カレント j^μ の対応関係もみてみよう。成分ごとに書き下すと、

$$\begin{aligned}
j_A^0 &= \psi_+^\dagger\psi_+ + \psi_-^\dagger\psi_- , \\
j_A^1 &= -\psi_+^\dagger\psi_+ + \psi_-^\dagger\psi_- .
\end{aligned} \tag{2.54}$$

⁵鋭い人は気づいたかもしれない。この計算で $j_A^0(x, t)$ として (2.51) の極限を採用し、 $j_A^1(x, t)$ を (2.52) の極限として計算した。実はこの極限の取り方に微妙さがある。例えば $j_A^0(x, t) = \lim_{y \rightarrow x} (\psi_+^\dagger(x, t)\psi_+(y, t) - \psi_-^\dagger(x, t)\psi_-(y, t))$ として計算すると $\lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{i(x - y)}$ のような虚数の UV 発散項が出てくる。カレントは実数なのでこれはおかしい気がする。今回は j_A^μ として自然な（実数になるような）極限の取り方を採用した。正直この辺りは微妙なところです。

先ほどと同様に (2.49) の対応関係を用いて計算すると以下の対応を得る。

$$j^0(x, t) = \lim_{y \rightarrow x} (\psi_+^\dagger(x, t)\psi_+(y, t) + \psi_-^\dagger(x, t)\psi_-(y, t)) , \quad (2.55)$$

$$\iff \frac{1}{2\pi} \underbrace{\partial_1 \phi}_{=\partial_0 \tilde{\phi}} = 4\tilde{j}_B^0 ,$$

$$j^1(x, t) = \lim_{y \rightarrow x} (-\psi_+^\dagger(x, t)\psi_+(y, t) + \psi_-^\dagger(y, t)\psi_-(x, t)) , \quad (2.56)$$

$$\iff -\frac{1}{2\pi} \partial_1 \tilde{\phi} = 4\tilde{j}_B^1 .$$

よって、以下の対応関係があることが確かめられた。

$$j^\mu \iff 4\tilde{j}_B^\mu . \quad (2.57)$$

このように、演算子対応 (2.48) から保存カレントの対応を確認することができた。このように、自由場の理論を用いて fermion と boson の対応関係を見ることができた。これらの結果を踏まえてボソンの辞書をまとめよう。

ボソン/フェルミオンの辞書 (演算子の対応) :

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &\iff \frac{1}{8\pi}(\partial\phi)^2 , \\ \psi_\pm(x, t) &\iff \frac{1}{\sqrt{2\pi}} :e^{\mp i\phi_\pm(x, t)}: , \\ j_A^\mu &\iff 4j_B^\mu , \\ j^\mu &\iff 4\tilde{j}_B^\mu , \end{aligned} \quad (2.58)$$

ここで、 ψ_\pm は chiral fermion、 ϕ_\pm は chiral boson であり、fermion と boson のカレントはそれぞれ $j_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ 、 $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 、 $j_B^\mu = \frac{1}{8\pi}\partial^\mu\phi$ 、 $\tilde{j}_B^\mu = \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$ で与えられる。

このボソン/フェルミオン双対性は場の量子論を調べる上で非常に強力な双対性であり、自由場以外の理論に対しても用いることができると言じられている⁶。この修士論文でもこのボソン/フェルミオン双対性を何度も使用する。

3 非自明なサイクルを持つ多様体上のボソン/フェルミオン双対性

このセクションでは時空に非自明なサイクルを持つような場合にボソン/フェルミオン双対性がどのようになるかを議論する。前のセクションでは 2 次元時空におけるボソン/フェルミオン双対性の辞書 (演算子対応) を説明した。辞書の中に出てくる演算子の対応は local な対応 (空間

⁶厳密な証明はないけど、色々なモデルで確かめて反例が出ない。だから信じましょうみたいなノリだと思います。

の各点での対応)であるため非自明なサイクルの有無のような global な構造には依らない。しかし、分配関数を考えると明らかな違いがある。例えば fermion の場合、分配関数はトーラスの spin structure(=fermion 場の境界条件)に依存する。しかし、boson の場合分配関数に spin structure は出てこない。このセクションではこのような問題解決するためにより一般的なボソン/フェルミオン双対性の辞書を説明する。

構成は以下の通り。まずセクション 3.2 では簡単な例であるトーラス上の free massless fermion について勉強する。次にセクション 3.3 ではトーラス上の free compact boson について議論し、fermion 側との対応関係を考察する。そしてセクション 3.5 で時空に非自明なサイクルがある場合のボソン/フェルミオン双対性の辞書を述べる。最後のセクション 3.6 ではその応用として massless Thirring model の分配関数を導出する。

3.1 2 次元 CFT の予備知識

このセクションでは必要最低限の 2 次元 CFT の知識を整理しておく。これから紹介する CFT の性質はちゃんと導出しようとすると書かないといけないことが多くなってしまうので結果だけの紹介に留めるとする。より詳しい説明は教科書 (Yellow book[22]、Ginsparg の lecture[23]、疋田さんの本 [24] など) を参照すると良い。なお、このセクションでは時空は Euclid 化されているものとする。

3.1.1 共形変換 (2 次元)

今、2 次元 Euclid 時空を考え、座標を (x^0, x^1) とする ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1)$)。また、以下の複素座標 z, \bar{z} を導入する。

$$\begin{cases} z = x^0 + ix^1 \\ \bar{z} = x^0 - ix^1 \end{cases}. \quad (3.1)$$

共形変換とは計量が $g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \Lambda(x)g_{\mu\nu}$ と変換するような座標系の変換のことであり、2 次元の場合は任意の正則関数 $f(z)$ を用いた変換が許される⁷。

$$\begin{cases} z \rightarrow z' = f(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) \end{cases}. \quad (3.2)$$

check:

$$ds^2 = \eta'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = dz' d\bar{z}' = f'(z) \bar{f}'(\bar{z}) dz d\bar{z} = \left(f'(z) \bar{f}'(\bar{z}) \right) \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

確かに $g'_{\mu\nu} = \Lambda(x)g_{\mu\nu}$ の形になっている。

また、微小変換の場合は、

$$\begin{cases} z' = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1} \\ \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1} \end{cases}. \quad (3.3)$$

⁷由緒正しく導出したい人は共形 killing 方程式を解こう

となる。ここで、 $\epsilon(z)$, $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ はそれぞれ微小な大きさを持つ正則関数、反正則関数であり Laurent 展開を行った。それぞれの微小変換 ϵ_n , $\bar{\epsilon}_n$ に対応する生成子を L_n , \bar{L}_n とする。これらは Virasoro 生成子と呼ばれ、動径量子化を行うと以下の Virasoro 代数を満たす。

$$\begin{cases} [L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n - m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \end{cases}. \quad (3.4)$$

ここで、 c は central charge と呼ばれる定数であり、理論を特徴付ける量である。また、この変換全体の生成子が $Q = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n L_n$ と書けることからエネルギー運動量テンソル $T(z)$ は

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad (3.5)$$

と書ける⁸。また、(3.3) から L_0 , \bar{L}_0 動径量子化では動径方向を時間のように扱うので、ハミルトニアン H (動径方向の生成子 \leftrightarrow dilatation) と運動量 P (角度方向の生成子 \leftrightarrow rotation) は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} H &= L_0 + \bar{L}_0 \\ P &= L_0 - \bar{L}_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.6) についての補足:

スカラー場 $\phi(z)$ を例にとるとわかりやすいだろう。スカラー場の時、微小変換 (3.3) で場の変換は

$$\phi(z') = \phi \left(z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1} \right) = \phi(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1} \partial_z \phi(z).$$

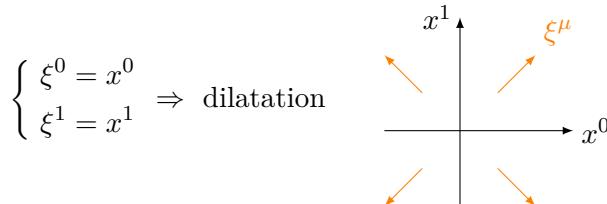
よって、 L_n の具体形は

$$L_n = z^{n+1} \partial_z,$$

とわかった(これはスカラー場の場合に成り立つ)。 \bar{L}_n についても同様である。これを用いて H , P を変形し、killing vector を読み取ってみよう。 $z = x^0 + ix^1$ より、

$$H = L_0 + \bar{L}_0 = z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}} = x^0\partial_0 + x^1\partial_1, \quad (3.7)$$

となることわかるので、ここから killing vector を読み取ると確かに dilatation になっていることが確かめられる。

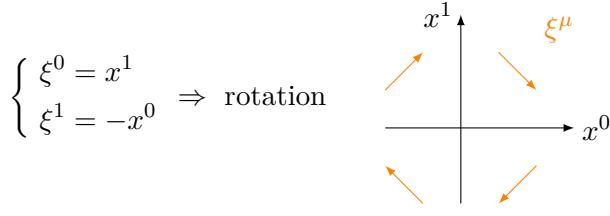


⁸このエネルギー運動量テンソル $T(z)$ は $T = -2\pi T_{z,z}$ で定義されており、動径量子化の議論で $Q = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \epsilon(z) T(z)$ と書けることを用いると (3.5) が自然に出てくる。

また、運動量 P の方も同様に計算してみよう。

$$P = L_0 - \bar{L}_0 = z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}} = i(x^1\partial_0 - x^0\partial_1) , \quad (3.8)$$

よって、ここから killing vector を読み取ると確かに回転になっていることがわかる。



3.1.2 場の変換性

ここでは CFTにおいて非常に重要な場の変換性について述べる。共形ウェイト (h, \bar{h}) を持つ Primary 場 $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ は共形変換で以下のように変換するものとして定義される。

$$\mathcal{O}(z', \bar{z}') = \left(\frac{dz}{dz'} \right)^h \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} \right)^{\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) . \quad (3.9)$$

また、エネルギー運動量テンソルについては厳密には primary 場ではないことから共形変換に余計なお釣りがついてくることが知られている。

$$T'(z') = \left(\frac{dz}{dz'} \right)^2 \left(T(z) - \frac{c}{12} \{z'; z\} \right) , \quad (3.10)$$

ここで、 $\{f(z); z\}$ はシュワルツ微分と呼ばれ以下で定義される。

$$\{f(z); z\} := \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 . \quad (3.11)$$

3.1.3 トーラスの分配関数

時空がトーラスの場合を考えてみよう。トーラスとは図 1 のように周期性のある 2 次元空間であり、moduli $\tau \in \mathbb{C}$ で特徴付けられる。トーラスの複素座標を ω とする ($\text{Re } \omega$: 空間 (角度) 方向、 $\text{Im } \omega$: 時間 (動径) 方向)。分配関数は $Z = \langle 0 | e^{iX^\mu P_\mu} | 0 \rangle$ で書けることを思い出そう (X^μ は考えている時空の端から端までの座標)⁹。 $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ とすると、トーラスを一周する際に時間 (動径) 方向に $2\pi i\tau_2$ 、空間 (角度) 方向に $2\pi\tau_1$ だけ進むので、分配関数 $Z(\tau)$ は以下のように書ける。

$$Z(\tau) = \langle 0 | e^{-2\pi\tau_2 H + 2\pi i\tau_1 P} | 0 \rangle = \text{Tr} \left[e^{-2\pi\tau_2 H + 2\pi i\tau_1 P} \right] . \quad (3.12)$$

⁹有限温度系ではよく $Z = \langle 0 | e^{-\beta H} | 0 \rangle$ という式が出てくるが、これはこの式の特別な場合。虚時間方向のみに注目すると、 $X^0 = i\beta$ より、 $Z = \langle 0 | e^{-\beta H} | 0 \rangle$ となる。ここで、 H は時間方向の生成子 (ハミルトニアン)

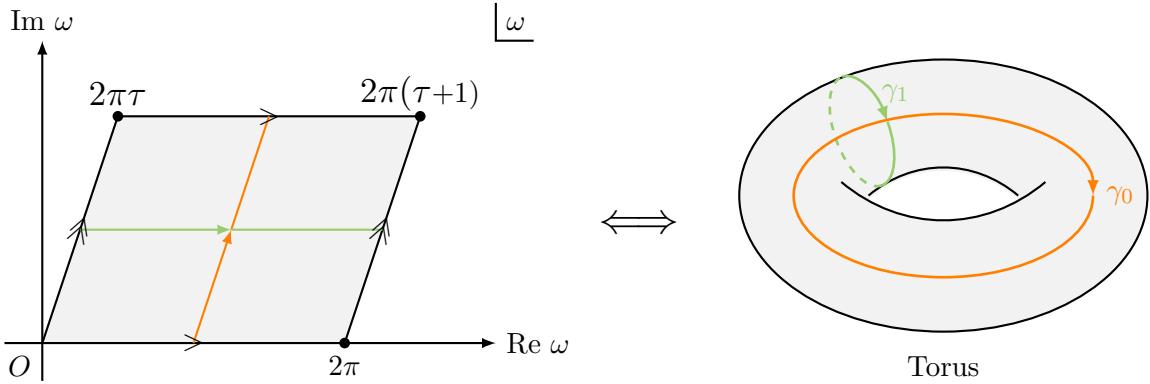


図 1. トーラスの座標(左図)と模式図(右図)。左図ではトーラス上の複素座標を ω とし、空間は両端で周期的になっている。 τ はトーラスの moduli と呼ばれ、トーラスの 2 つの cycle(オレンジと黄緑の cycle) の長さ比とトーラスの捩れ具合を表す。

ここで、 H , P はそれぞれトーラス上のハミルトニアン(動径方向の生成子)、運動量(角度方向の生成子)である。 H , P は L_0 , \bar{L}_0 を用いて $H = L_0 + \bar{L}_0 - c/12$, $P = L_0 - \bar{L}_0$ を書けることを用いると、

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \text{Tr} \left[\exp \left(-2\pi\tau_2 \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) + 2\pi i \tau_1 (\bar{L}_0 - L_0) \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\exp \left(2\pi i \tau \left(L_0 - \frac{c}{24} \right) \right) \exp \left(-2\pi i \bar{\tau} \left(\bar{L}_0 - \frac{c}{24} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

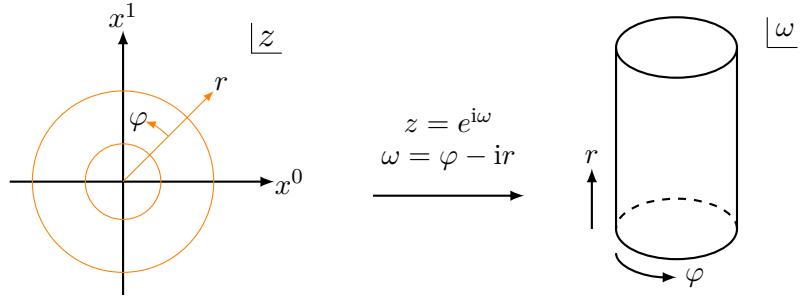
よって、以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \text{Tr} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \right), \\ \tau &: \text{トーラスの moduli}, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \bar{q} = e^{-2\pi i \bar{\tau}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$H = L_0 + \bar{L}_0 - c/12$, $P = \bar{L}_0 - L_0$ の補足:

(3.6) では $H = L_0 + \bar{L}_0$, $P = \bar{L}_0 - L_0$ としていたが、今回は余計な constant $-c/12$ が入る。これについて説明しよう。

トーラスを作るためにはまず 2 次元平面をシリンダーに map し、シリンダーの両端を同一視すれば良い(下の図を参照)：



この Plane から Cylinder に map する共形変換は以下で与えられる。

$$z \rightarrow \omega = \varphi - ir = \frac{1}{i} \log z . \quad (3.15)$$

(3.14) を導出する際に用いるハミルトニアン H 、運動量 P は cylinder 上で定義されているものであると考えるべきなので、厳密に書くと、

$$\begin{aligned} H &= L_0^{\text{cyl}} + \bar{L}_0^{\text{cyl}} \\ P &= \bar{L}_0^{\text{cyl}} - L_0^{\text{cyl}} , \end{aligned} \quad (3.16)$$

である。この共形変換 (3.15) を用いると、 $\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 = -z^2$, $\{\omega, z\} = \frac{1}{2z^2}$ が得られるので、エネルギー運動量テンソルの変換式 (3.10) に代入すると、

$$\begin{aligned} T^{\text{cyl}}(\omega) &= -z^2 T(z) + \frac{c}{24} \\ &= -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^n} + \frac{c}{24} , \end{aligned} \quad (3.17)$$

を得る。最後の式変形では $T(z)$ の級数展開 (3.5) を用いた。この式の z のゼロ次に注目すると cylinder 上の L_0^{cyl} (\bar{L}_0^{cyl}) を読み取ることができる。

$$\begin{aligned} L_0^{\text{cyl}} &= L_0 - \frac{c}{24} \\ \bar{L}_0^{\text{cyl}} &= \bar{L}_0 - \frac{c}{24} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

これを (3.16) に代入すれば、 $H = L_0 + \bar{L}_0$, $P = \bar{L}_0 - L_0$ を得る。

3.2 トーラス上の massless free fermion

このセクションでは非自明なサイクルのある時空上のモデルの例として、トーラス上の massless free fermion を考えてみよう。トーラスは二次元平面から共形変換で作ることができる。2 次元平面上の massless free fermion の作用は以下で与えられる。

$$S = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \overline{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi , \quad (3.19)$$

ここで Ψ は Majorana fermion である。また、ガンマ行列の具体形として以下のものを用いるとする¹⁰。

$$\gamma^0 = \sigma^x, \quad \gamma^1 = \sigma^y, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1 = \sigma^z, \quad (3.20)$$

¹⁰Minkowski 時空 ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$) の時 $\gamma^1 = i\sigma^y$ としていたが、Euclidean では計量を $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1)$ にするため今回は $\gamma^1 = \sigma^y$ と変更している。

例によって2次元平面上の複素座標 $z = x^0 + ix^1$, $\bar{z} = x^0 - ix^1$ を用いると便利である。作用のガンマ行列の部分を計算すると、

$$\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_0 - i\partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_0 + i\partial_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \bar{\partial} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

となる ($\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$)。fermion 場のスピノルの成分を $\Psi = (\psi, \bar{\psi})^T$ と置くと以下の作用が得られる。

$$S = 2 \int_{\mathbb{C}} d^2 z \left(\bar{\psi} \partial \bar{\psi} + \psi \bar{\partial} \psi \right) , \quad (3.22)$$

この作用から変分を取ると以下の運動方程式を得る。

$$\begin{cases} \bar{\partial} \psi = 0 , \\ \partial \bar{\psi} = 0 . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = \psi(z) , \\ \bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{z}) . \end{cases} \quad (3.23)$$

よって、 $\psi(z), \bar{\psi}(\bar{z})$ がそれぞれ正則関数、反正則関数であることがわかった。

3.2.1 正準量子化

それではこのモデルの量子化を行おう。簡単のため正則な部分 $\psi(z)$ に注目する (反正則な部分 $\bar{\psi}(\bar{z})$ に対しても同様の議論が成り立つ)。 $\psi(z)$ を以下のように Laurant 展開しよう。

$$i\psi(z) = \sum_n \psi_n z^{-n-1/2} , \quad (3.24)$$

ここで、 \sum_n に出てくる変数 n は今は整数か半整数のどちらかであり、後で決定するとする。また、係数 $\psi_n, \tilde{\psi}_n$ は演算子に格上げされているとし、動径量子化を行うと以下の反交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} \{\psi_n, \psi_m\} &= \delta_{n+m,0} , \\ (\text{それ以外}) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.25)$$

ここで、 $\psi_{n<0}, \psi_{n>0}$ はそれぞれ生成・消滅演算子である。

さて、ここで考えている2次元平面をシリンダーにマップすることを考えよう。共形変換は $z = e^{i\omega}$ で与えられる。シリンダー上の fermion 場を $\psi_{\text{cyl}}(\omega)$ とすると、

$$\begin{aligned} \psi_{\text{cyl}}(\omega) &= \left(\frac{dz}{d\omega} \right)^{1/2} \psi(z) , \\ &= i^{-1/2} \sum_n \psi_n e^{-in\omega} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。ここで fermion 場の共形ウェイトが $(h, \bar{h}) = (1/2, 0)$ であることと、 $\psi(z)$ のモード展開 (3.24) を用いた。後で重要なため、シリンダー上の fermion 場の周期性について考えよう。fermion 場には以下の二つの境界条件がある。

$$\begin{cases} \psi_{\text{cyl}}(\omega + 2\pi) = -\psi_{\text{cyl}}(\omega) & : \text{Anti-periodic (A)} , \\ \psi_{\text{cyl}}(\omega + 2\pi) = +\psi_{\text{cyl}}(\omega) & : \text{Periodic (P)} . \end{cases} \quad (3.27)$$

シリンダー上のモード展開の式 (3.26) からこの二つの境界条件は以下のように対応することがわかる。

$$\begin{cases} A : n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \\ P : n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.28)$$

最後に、後でトーラス上の分配関数を求めるために必要となる L_0 を求めておこう。この系のエネルギー運動量テンソルを求ると以下のようになる。

$$T(z) = \frac{1}{2} : \psi(z) \partial \psi(z) :, \quad (3.29)$$

ここで、同じ点における演算子の積の順番を明確にするため normal ordering を用いた。この式にモード展開 (3.24) を代入し、 z^{-2} に比例する項から L_0 として以下の結果を得る¹¹。

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_n (-n + 1/2) : \psi_n \psi_{-n} : = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} n \psi_{-n} \psi_n & : A \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \psi_{-n} \psi_n + \frac{1}{16} & : P \end{cases} \quad (3.30)$$

3.2.2 トーラス分配関数

さて、次にトーラス上の massless free fermion の分配関数を求めることを考えよう。トーラス上で fermion を考える場合 spin structure に注意をしなければならない。トーラス上の spin structure を ϱ とすると、以下の 4 通りの spin structure がある。

$$\begin{cases} \varrho = AA : \psi(\omega + 2\pi\tau) = -\psi(\omega), \psi(\omega + 2\pi) = -\psi(\omega), \\ \varrho = AP : \psi(\omega + 2\pi\tau) = -\psi(\omega), \psi(\omega + 2\pi) = +\psi(\omega), \\ \varrho = PA : \psi(\omega + 2\pi\tau) = +\psi(\omega), \psi(\omega + 2\pi) = -\psi(\omega), \\ \varrho = PP : \psi(\omega + 2\pi\tau) = +\psi(\omega), \psi(\omega + 2\pi) = +\psi(\omega), \end{cases} \quad (3.31)$$

ここで $\psi(\omega)$ はトーラス上の場である。fermion の場合、fermi 統計から非自明なサイクルに沿って反周期性があるのが自然である（有限温度の fermion を扱う時、虚時間方向に反周期性を課すのと同じ）。 $\varrho = AA$ 以外の spin structure はトーラス上に非局所的な fermion parity 演算子 $(-1)^F$ が挿入されていると解釈することができる。図 2 に spin structure と fermion parity 演算子 $(-1)^F$ の空間的配置をまとめた。

¹¹導出の際に注意すべきことは、 $: \psi_n \psi_{-n} :$ が以下のように評価できることである。

$$\begin{aligned} n > 0 \text{ の時} : & : \psi_n \psi_{-n} : = \psi_n \psi_{-n} - \underbrace{\langle \psi_n \psi_{-n} \rangle}_{\text{生成}} = \psi_n \psi_{-n} - 1 = -\psi_{-n} \psi_n, \\ n < 0 \text{ の時} : & : \psi_n \psi_{-n} : = \psi_n \psi_{-n} - \underbrace{\langle \psi_n \psi_{-n} \rangle}_{\text{消滅}} = \psi_n \psi_{-n}. \end{aligned}$$

また、エネルギー運動量テンソルの期待値を計算すると $\langle T(z) \rangle = 0$ (A), $1/16$ (P) となるので Periodic な場合に L_0 に定数項 $1/16$ を足した。詳しくは Polchinski の教科書 [25] の 6.4 章を参照せよ。

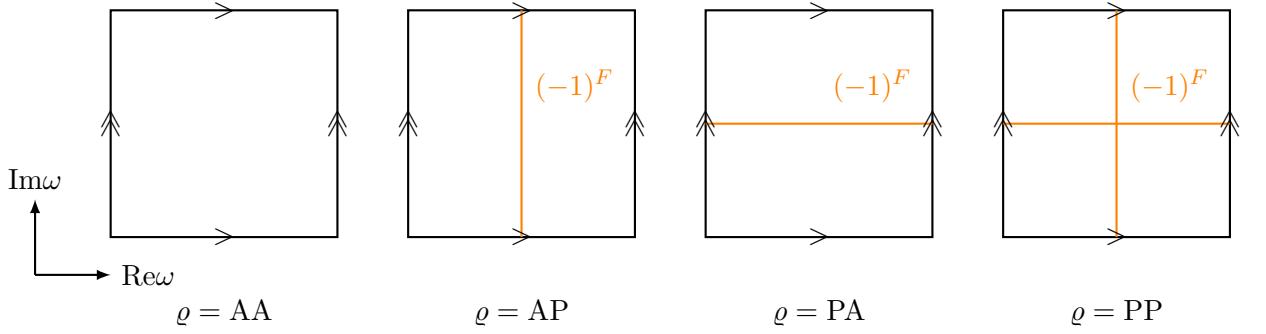


図 2. spin structure ϱ と非局所的な fermion parity 演算子 $(-1)^F$ の対応関係。

この解釈より、それぞれの spin structure に対応する分配関数は以下のようにかける。

$$\begin{cases} Z_F[\text{AA}] = \text{Tr}_A \left[q^{L_0 - \frac{1}{48}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{1}{48}} \right] = |d_{\text{AA}}|^2, \\ Z_F[\text{AP}] = \frac{1}{2} \text{Tr}_P \left[q^{L_0 - \frac{1}{48}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{1}{48}} \right] = |d_{\text{AP}}|^2, \\ Z_F[\text{PA}] = \text{Tr}_A \left[(-1)^F q^{L_0 - \frac{1}{48}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{1}{48}} \right] = |d_{\text{PA}}|^2, \\ Z_F[\text{PP}] = \frac{1}{2} \text{Tr}_P \left[(-1)^F q^{L_0 - \frac{1}{48}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{1}{48}} \right] = |d_{\text{PP}}|^2, \end{cases} \quad (3.32)$$

ここで、トーラス上の分配関数の一般式 (3.14) と Majorana fermion の中心電荷の値 $c = 1/2$ を用いた。 $\frac{1}{2}$ のファクターがある場合があるがこれは単にコンベンションである。また、今後のためトレースの構成要素 d_{AA} , d_{AP} , d_{PA} , d_{PP} を以下のように定義した。

$$\begin{aligned} d_{\text{AA}} &:= \text{Tr}_A \left[q^{L_0 - \frac{1}{48}} \right], & d_{\text{AP}} &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr}_P \left[q^{L_0 - \frac{1}{48}} \right], \\ d_{\text{PA}} &:= \text{Tr}_A \left[(-1)^F q^{L_0 - \frac{1}{48}} \right], & d_{\text{PP}} &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr}_P \left[(-1)^F q^{L_0 - \frac{1}{48}} \right], \end{aligned} \quad (3.33)$$

あとはこれらの値をそれぞれ計算すれば良い。

- d_{AA} の計算:
 L_0 は (3.30) で与えられている。よって、計算すべき量は

$$d_{\text{AA}} = \text{Tr}_A \left[q^{\sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} n \psi_{-n} \psi_n - \frac{1}{48}} \right], \quad (3.34)$$

である。 n 番目の項 $q^{n \psi_{-n} \psi_n}$ に注目し、基底 $|0\rangle_n$, $|1\rangle_n := \psi_n |0\rangle_n$ を用いて行列表示してみよう。

$$q^{n \psi_{-n} \psi_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

$q^{\sum_{n>0} n\psi_n - n\psi_n}$ は行列表示するとこれらの行列のクロネッカー積で表せる¹²。クロネッカーパイのトレースの性質 $\text{Tr}(A \otimes B) = (\text{Tr } A)(\text{Tr } B)$ より、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} d_{AA} &= q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_A \left[\bigotimes_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \right], \\ &= q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^{n+1/2}), \\ &= \sqrt{\frac{\vartheta_3(\tau)}{\eta(\tau)}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

最後の計算では theta 関数と eta 関数を用いた(付録 B)。

- d_{AP} の計算:

この場合も d_{AA} と同様に計算できる。ただし Periodic の n の値 (3.30) を用いることに注意。

$$\begin{aligned} d_{AP} &= \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{1}{24}} \text{Tr}_P \left[\bigotimes_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \right], \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^n), \\ &= \sqrt{\frac{\vartheta_2(\tau)}{\eta(\tau)}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

- d_{PA} の計算:

この場合は $(-1)^F$ が 1 粒子状態に対して作用することに注意。Anti-periodic の n の値 (3.30) を用いると、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} d_{PA} &= q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_A \left[(-1)^F \bigotimes_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \right], \\ &= q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 - q^{n+1/2}), \\ &= \sqrt{\frac{\vartheta_4(\tau)}{\eta(\tau)}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

¹²行列 A, B のクロネッカーパイの定義は以下の通り。

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

この定義から $\text{Tr } A \otimes B = a_{11} \text{Tr } B + \cdots + a_{nn} \text{Tr } B = (\text{Tr } A)(\text{Tr } B)$ が成り立つことがわかる。

- d_{PP} の計算:

この場合は Periodic の n の値 (3.30) かつ $(-1)^F$ がある場合である。

$$\begin{aligned} d_{\text{PP}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{1}{24}} \text{Tr}_P \left[(-1)^F \bigotimes_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \right] , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 - q^n) , \\ &= 0 \quad \left(= \sqrt{\frac{\vartheta_1(\tau)}{\eta(\tau)}} \right) . \end{aligned} \quad (3.40)$$

よって、以上の計算結果 (3.37)-(3.40) より Majorana fermion の分配関数として以下の結果を得る。

トーラス上の free massless Majorana fermion の分配関数

$$\begin{aligned} Z_F[\text{AA}] &= \left| \frac{\vartheta_3(\tau)}{\eta(\tau)} \right| , \quad Z_F[\text{AP}] = \left| \frac{\vartheta_2(\tau)}{\eta(\tau)} \right| , \\ Z_F[\text{PA}] &= \left| \frac{\vartheta_4(\tau)}{\eta(\tau)} \right| , \quad Z_F[\text{PP}] = 0 \left(= \left| \frac{\vartheta_1(\tau)}{\eta(\tau)} \right| \right) , \end{aligned} \quad (3.41)$$

この表式ではトーラスの modular S 変換 $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ の変換性が明確である (付録の公式 (B.7) 参照)。

modular S 変換の変換性:

$$\begin{aligned} Z_F[\text{AA}] &\rightarrow Z_F[\text{AA}] , \quad Z_F[\text{AP}] \rightarrow Z_F[\text{PA}] , \\ Z_F[\text{PA}] &\rightarrow Z_F[\text{AP}] , \quad Z_F[\text{PP}] \rightarrow Z_F[\text{PP}] , \end{aligned} \quad (3.42)$$

modular S 変換はトーラスの二つの非自明なサイクルを入れ替えに対応しているので、この結果は図 2 の解釈から納得できる。 $\varrho = \text{AA}, \text{PP}$ はトーラスの二つの非自明なサイクル入れ替えに対して不变であるが、 $\varrho = \text{AP}, \text{PA}$ の場合は非局所演算子 $(-1)^F$ の位置関係が入れ替わる。

3.3 トーラス上の compact boson

それではもう一つの例であるトーラス上の compact boson を扱ってみよう¹³。作用は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} Z_B[R, \tau] &:= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{R^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right] , \\ &= \int \mathcal{D}X \exp \left[-\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \partial^\mu X \partial_\mu X \right] , \\ &= \int \mathcal{D}X \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2z \partial X \bar{\partial} X \right] . \end{aligned} \quad (3.43)$$

¹³compact boson に関しては Polchinski の教科書 [25] の 8.2 章を参考にした。

ここで、場を $X(z, \bar{z}) := R\phi(z, \bar{z})$ として再定義した¹⁴。また、最後の表式では 2 次元平面上の複素座標 $z = x^0 + ix^1$ を用い、 $\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ と略記した。トーラス上の複素座標 $\omega = \varphi - ir$ とは共形変換 $z = e^{i\omega}$ で関係している。また、場 X はその値に以下の周期性があるとする。

$$X(z, \bar{z}) \sim X(z, \bar{z}) + 2\pi R . \quad (3.44)$$

後でわかることがあるが、この条件により運動量が量子化される。また、もう一つの重要な周期性は以下の通り。

$$X(\varphi + 2\pi) = X(\varphi) + 2\pi R w , \quad w \in \mathbb{Z} . \quad (3.45)$$

ここで、 w はトーラス上的一つの非自明なサイクルを一周したときに compact boson が何回巻き付いているかを表す整数であり、winding number と呼ばれている。

3.3.1 正準量子化

それでは compact boson に正準量子化を行おう。まず運動方程式は作用 (3.43) より、

$$\partial\bar{\partial}X = \bar{\partial}\partial X = 0 . \quad (3.46)$$

よって、この解は $\partial X = (z \text{ の関数})$, $\bar{\partial}X = (\bar{z} \text{ の関数})$ となるため、以下のように Laurant 展開できる。

$$\partial X = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m}{z^{m+1}} , \quad \bar{\partial}X = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m}{\bar{z}^{m+1}} . \quad (3.47)$$

ここで、係数 α_m , $\tilde{\alpha}_m$ は演算子に格上げされているとする。動径量子化より以下の交換関係を満たす。

$$[\alpha_m, \alpha_n] = [\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_n] = m\delta_{m+n,0} , \quad (3.48)$$

(それ以外) = 0 .

このモード展開を用いると、winding number は以下のように書ける。

$$2\pi R w = \oint (dz \partial X + d\bar{z} \bar{\partial}X) = 2\pi(\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0) . \quad (3.49)$$

ここで、 \oint は z 平面上の原点を囲む周回積分を表しており、最後に式では $\oint dz z^n = 2\pi i \delta_{n,-1}$ を用いた。また、運動量 p はネーター電荷として、以下で与えられる。

$$p = \frac{1}{4\pi} \oint (dz \partial X - d\bar{z} \bar{\partial}X) = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0) . \quad (3.50)$$

ここで、winding number が整数であることと、運動量の量子化 $p = \frac{n}{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ を組み合わせると、 α_0 , $\tilde{\alpha}_0$ (の固有値) に対して以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} p_L &:= \alpha_0 = \frac{n}{R} + \frac{wR}{2} , \\ p_R &:= \tilde{\alpha}_0 = \frac{n}{R} - \frac{wR}{2} , \end{aligned} \quad (3.51)$$

¹⁴これは単に気分の問題です。場 X の方が標準的だと思うのでこうしました。

次に、分配関数を求めるため Virasoro 生成子の L_0 , \bar{L}_0 を求めよう。この系のエネルギー運動量テンソル $T(z)$ は以下の通り¹⁵。

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{2} : \partial X \partial X : , \\ &= \frac{1}{2} z^{-m-m'-2} : \alpha_m \alpha_{m'} : . \end{aligned} \quad (3.52)$$

$\bar{T}(\bar{z})$ についても同様である。エネルギー運動量テンソルの級数展開 (3.5) より、 L_0 は z^{-2} の項を見れば読み取れる。上の式で z^{-2} に比例する部分に注目すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} p_L^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \alpha_m , \\ \bar{L}_0 &= \frac{1}{2} p_R^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-m} \tilde{\alpha}_m , \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここで、 α_n , $\tilde{\alpha}_n$ は $n > 0$ の時に消滅演算子で、 $n < 0$ の時は生成演算子であることを用いた。

今や L_0 , \bar{L}_0 の表式が得られたので、トーラスの分配関数の公式 (3.14) を用いることにより free compact boson の分配関数は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} Z_B[R, \tau] &= \text{Tr} \left[q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \right] = \langle 0 | q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} | 0 \rangle , \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n, w \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2} p_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2} p_R^2} , \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n, w \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} . \end{aligned} \quad (3.54)$$

ここで、1行目から2行目に行く時には normal ordering の作用により (3.51) の第2項がトレースに寄与しないことを用いた。また、分配関数の modular S 不変性を担保するために $|\eta(\tau)|^2$ のファクターを用いて規格化した。

さらに、トーラスの modular τ が純虚数の場合はこの分配関数は theta 関数を用いてシンプルに書くことができる (theta 関数と eta 関数に関しては付録 B を参照せよ)。 $\tau = i\ell$ と置き多少の計算をすると以下の結果を得る。

$$Z_B[R, i\ell] = \frac{1}{\eta(i\ell)^2} \vartheta_3 \left(i \frac{2\ell}{R^2} \right) \vartheta_3 \left(i \frac{R^2\ell}{2} \right) . \quad (3.55)$$

よって、free compact boson の分配関数を求めることができた。

3.3.2 \mathbb{Z}^B ゲージ場がある場合

さて、今度はトーラス上の free compact boson に \mathbb{Z}_2^B ゲージ場が入った場合を考えよう。今回は以下の \mathbb{Z}_2^B 対称性を扱ってみよう。

$$\mathbb{Z}_2^B : X(z, \bar{z}) \rightarrow X(z, \bar{z}) + \pi R . \quad (3.56)$$

¹⁵ ここで、 $T(z)$ の定義に normal ordering が入っているが、これは同じ点 z における演算子積 $\partial X(z, \bar{z}) \bar{\partial} X(z, \bar{z})$ の曖昧さを取り除くために必要である。

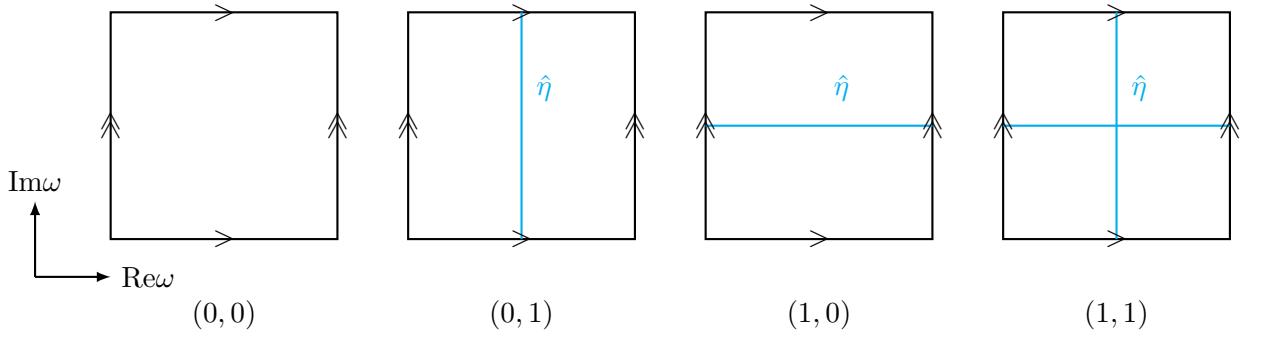


図 3. \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の挿入と非局所演算子 $\hat{\eta}$ 演算子の対応関係。ここで、 (T_0, T_1) は \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の holonomy を表す。

この \mathbb{Z}_2^B 対称性に対する離散ゲージ場 $T \in H^1(\mathbf{T}, \mathbb{Z}_2^B)$ を考える。離散ゲージ場 T の holonomy を T_0, T_1 とする；

$$T_0 = \oint_{\gamma_0} T, \quad T_1 = \oint_{\gamma_1} T, \quad T_0, T_1 \in \{0, 1\}. \quad (3.57)$$

ここで、 γ_0, γ_1 は図 1 の左のようにトーラス上の二つのサイクルである。また、 T は \mathbb{Z}_2 ゲージ場より、holonomy は 0 か 1 の値しか取らない。よって、トーラスの場合は \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の配位として以下の 4 通りがある。

$$(T_0, T_1) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). \quad (3.58)$$

\mathbb{Z}_2^B ゲージ場の holonomy がゼロでない場合、場 X はその方向に (3.56) の変換を受ける。例えば $(T_0, T_1) = (0, 1)$ の場合は以下の境界条件を満たす。

$$X(\varphi + 2\pi) = X(\varphi) + \pi R. \quad (3.59)$$

このように \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の存在は場の境界条件に作用するが、これは以下の作用をする非局所的な演算子 $\hat{\eta}$ がトーラス上に挿入されていると考えることもできる。

$$\hat{\eta}X(\varphi, r) = X(\varphi, r) + \pi R. \quad (3.60)$$

先ほどの例 $(T_0, T_1) = (0, 1)$ の場合、演算子 $\hat{\eta}$ はトーラスの φ 一定面に存在しているとみなすことができる（図 3 の左から二つ目を参照）。それ以外の \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の配位についても同様の解釈ができる。図 3 にそれぞれの \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の配位と非局所演算子 $\hat{\eta}$ の位置関係をまとめた。

まずは \mathbb{Z}_2^B ゲージ場がある場合の分配関数を求める準備をしよう。 $(T_0, T_1) = (0, 0)$ の場合は \mathbb{Z}_2^B ゲージ場がない場合と同じなので分配関数は先ほど求めた値と一緒にである。しかし、ノンゼロの \mathbb{Z}_2^B ゲージ場がある場合は非局所演算子 $\hat{\eta}$ の存在を考慮に入れないといけない。そこで、セクション 3.3.1 で行った解析をもう少し詳しく考えてみよう。まずは $\partial X, \bar{\partial} X$ に関する

モード展開を積分しよう。[\(3.47\)](#) より、以下の結果を得る。

$$\begin{cases} X_L(z) = x_L - ip_L \log z + i \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{\alpha_m}{mz^m}, \\ X_R(\bar{z}) = x_R - ip_R \log \bar{z} + i \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m}{m\bar{z}^m}. \end{cases} \quad (3.61)$$

ここで、場 $X(z, \bar{z})$ を正則な項と反正則な項に分けた。

$$X(z, \bar{z}) = X_L(z) + X_R(\bar{z}). \quad (3.62)$$

また演算子 $x_{L,R}$, $p_{L,R}$, α_m , $\tilde{\alpha}_m$ は以下の交換関係を満たす。

$$\begin{cases} [x_L, p_L] = [x_R, p_L] = i \\ [\alpha_m, \alpha_n] = [\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_n] = m\delta_{m+n,0}, \\ (\text{それ以外}) = 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

先ほどの議論では winding number と momoentum number の議論で p_L , p_R の固有値を [\(3.51\)](#) と求めたが、固有状態を具体的に書いておこう。Vertex operator とそれに対応する真空のゼロモード状態 $|0; n, w\rangle$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{V}_{n,w}(z, \bar{z}) := : \exp \left[i \left(\frac{n}{R} + \frac{wR}{2} \right) X_L(z) + i \left(\frac{n}{R} - \frac{wR}{2} \right) X_R(\bar{z}) \right] :, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} |0; n, w\rangle &:= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \mathcal{V}_{n,w}(z, \bar{z}) |0\rangle \\ &= \exp \left[i \left(\frac{n}{R} + \frac{wR}{2} \right) x_L + i \left(\frac{n}{R} - \frac{wR}{2} \right) x_R \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.65)$$

最後の等式では normal ordering の定義と真空の定義 $p_{L,R}|0\rangle = \alpha_{n>0}|0\rangle = \tilde{\alpha}_{n>0}|0\rangle = 0$ を用いた。この状態 $|0; n, w\rangle$ は $p_{L,R}$ の固有値 $\frac{n}{R} + \frac{wR}{2}$, $\frac{n}{R} - \frac{wR}{2}$ の固有状態となっている。

$$\begin{cases} p_L |0; n, w\rangle = \left(\frac{n}{R} + \frac{wR}{2} \right) |0; n, w\rangle, \\ p_R |0; n, w\rangle = \left(\frac{n}{R} - \frac{wR}{2} \right) |0; n, w\rangle, \end{cases} \quad (3.66)$$

(3.66) の証明:

交換関係 $[x_L, p_L] = [x_R, p_L] = i$ より、 $[p_{L,R}, x_{L,R}^n] = -inx_{L,R}^{n-1}$ が成り立つので以下の交換関係を満たす。

$$[p_{L,R}, e^{i\alpha x_{L,R}}] = \sum_n \frac{(i\alpha)^n}{n!} [p_{L,R}, x_{L,R}^n] = \alpha e^{i\alpha x_{L,R}}. \quad (3.67)$$

ここで、 α はただの数。これを用いて $p_L e^{\alpha x_L} |0\rangle$ を計算すると、

$$\begin{aligned} p_L e^{\alpha x_L} |0\rangle &= ([p_L, e^{\alpha x_L}] + e^{\alpha x_L} p_L) |0\rangle, \\ &= \alpha e^{\alpha x_L} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.68)$$

となる。 p_R についても同様。よって、[\(3.66\)](#) が成り立つ。

このセクションでは Hilbert 空間でトレースを取る場合、具体的な基底として vertex operator の基底 (3.65) を用いるとする。 \mathbb{Z}_2^B ゲージ場がない場合の計算 (3.73) では Hilbert 空間は以下のように張られる。

$$\mathcal{H} = \text{Span} \{ |0; n, w\rangle, n, w \in \mathbb{Z} \} . \quad (3.69)$$

準備が整ったのでそれぞれの \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の配位に対して分配関数を求めてみよう。

- $(T_0, T_1) = (0, 1)$ の場合:

この場合、図 3 の左から二つ目のように、トーラスの時間方向 ($\text{Im}\omega$ 方向) に沿って非局所演算子 η がある場合に対応する。 \mathbb{Z}_2^B ゲージ場がない場合は vertex operator の基底 $|0; n, w\rangle$, $n, w \in \mathbb{Z}$ で Hilbert 空間を張ることができたが、今回の場合は winding number が $w \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ と変更を受ける。というのも、 $T_1 = 1$ の定義より、 $X(\varphi + 2\pi) = X(\varphi) + \pi R$ となる。モード展開 (3.61) を用いて差分 $X(\varphi + 2\pi) - X(\varphi)$ 評価すると、

$$\begin{aligned} X(ze^{2\pi i}, \bar{z}e^{-2\pi i}) - X(z, \bar{z}) &= X_L(ze^{2\pi i}) + X_R(\bar{z}e^{-2\pi i}) - X_L(z) - X_R(\bar{z}), \\ &= 2\pi(p_L - p_R), \\ &= 2\pi wR . \end{aligned} \quad (3.70)$$

となる。これが $\text{mod } 2\pi R$ で πR に等しいと置くと、winding number と momentum number は以下の制約を受ける。

$$\begin{aligned} 2\pi wR &= \pi R \pmod{2\pi R}, \\ \Rightarrow w &\in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} . \end{aligned} \quad (3.71)$$

ここで、 $\text{mod } 2\pi R$ で式を評価したが、これは compact boson の場の値に関する条件 $X \sim X + 2\pi R$ から必要である。このことから Hilbert 空間は以下のように貼られることがわかる。

$$\tilde{\mathcal{H}} = \text{Span} \left\{ |0; n, w\rangle, n \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\} . \quad (3.72)$$

このように winding number が半整数になる Hilbert 空間は “twisted sector” と呼ばれる。よって、トーラスの分配関数は (3.73) と同様の計算すると以下の結果が得られる。

$$Z_B[01, R, \tau] = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{w \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} . \quad (3.73)$$

- $(T_0, T_1) = (1, 0)$ の場合:

この場合、図 3 の右から二つ目のように、トーラスの空間方向 ($\text{Re}\omega$ 方向) に沿って非局所演算子 η がある場合に対応する。この場合、時間一定面で Hilbert 空間を張ったときに非局所演算子 η は Hilbert 空間に影響を与えない。ただし、非局所演算子 η が空間方向に存在することから分配関数を求める際のトレースは以下のように変更される。

$$Z_B[10, R, \tau] = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[\hat{\eta} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \right] . \quad (3.74)$$

ここで、 $\hat{\eta}$ が vertex operator の基底 $|0; n, w\rangle$ にどのように作用するかを考えてみよう。 $\hat{\eta}$ は場に対して (3.62) のように作用することから、 X_L, X_R に対しては $\hat{\eta}X_{L,R}(z) = X_{L,R}(z) + \pi R/2$ と作用する。よって、(3.65) より、基底 $|0; n, w\rangle$ に対しては以下のように作用する。

$$\hat{\eta}|0; n, w\rangle = (-1)^n|0; n, w\rangle . \quad (3.75)$$

これを用いて $Z_B[10, R, \tau]$ を計算すると、

$$\begin{aligned} Z_B[10, R, \tau] &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[\hat{\eta} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \right], \\ &= \sum_{n, w \in \mathbb{Z}} \langle 0; n, w | \hat{\eta} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} | 0; n, w \rangle , \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n, w \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} , \end{aligned} \quad (3.76)$$

よって、 $(T_0, T_1) = (1, 0)$ の場合の分配関数が計算できた。

- $(T_0, T_1) = (1, 1)$ の場合:

最後に、 $(T_0, T_1) = (1, 1)$ の場合は \mathbb{Z}_2^B ゲージ場が両方向に入ってる場合、つまり図 3 の右に対応している。この場合は非局所演算子 $\hat{\eta}$ が Hilbert 空間を twist sector に変え、さらに空間的にも存在していることから、分配関数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} Z_B[11, R, \tau] &= \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}} \left[\hat{\eta} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \right], \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{w \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \langle 0; n, w | \hat{\eta} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} | 0; n, w \rangle , \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{w \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} . \end{aligned} \quad (3.77)$$

よって、全ての \mathbb{Z}_2^B ゲージ場の配位に対して free compact boson の分配関数を求めることができた。以上の結果をまとめると、

トーラス上の free compact boson の分配関数 (一般的 moduli の時):

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_B[00, R, \tau] = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{w \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} , \\ Z_B[01, R, \tau] = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{w \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} , \\ Z_B[10, R, \tau] = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{w \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} , \\ Z_B[11, R, \tau] = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{w \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n/R+wR/2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(n/R-wR/2)^2} . \end{array} \right. \quad (3.78)$$

また、特別な場合としてトーラスの moduli が純虚数である場合を考えてみよう ($\tau = i\ell$)。この場合付録 B にまとめた theta 関数と eta 関数を用いると以下のようにシンプルに書き下すことができる。

トーラス上の free compact boson の分配関数 (moduli が純虚数の時):

$$\begin{cases} Z_B[00, R, i\ell] = \frac{1}{\eta(i\ell)^2} \vartheta_3\left(i \frac{2\ell}{R^2}\right) \vartheta_3\left(i \frac{R^2\ell}{2}\right), \\ Z_B[01, R, i\ell] = \frac{1}{\eta(i\ell)^2} \vartheta_3\left(i \frac{2\ell}{R^2}\right) \vartheta_2\left(i \frac{R^2\ell}{2}\right), \\ Z_B[10, R, i\ell] = \frac{1}{\eta(i\ell)^2} \vartheta_4\left(i \frac{2\ell}{R^2}\right) \vartheta_3\left(i \frac{R^2\ell}{2}\right), \\ Z_B[11, R, i\ell] = \frac{1}{\eta(i\ell)^2} \vartheta_4\left(i \frac{2\ell}{R^2}\right) \vartheta_2\left(i \frac{R^2\ell}{2}\right). \end{cases} \quad (3.79)$$

今回の場合もトーラスの modular S 変換 $\ell \rightarrow \frac{1}{\ell}$ の変換性が明確である (付録の公式 (B.7) 参照)。

modular S 変換の変換性:

$$\begin{aligned} Z_B[00, R, i\ell] &\rightarrow Z_B[00, R, i\ell], & Z_B[01, R, i\ell] &\rightarrow Z_B[10, R, i\ell], \\ Z_B[10, R, i\ell] &\rightarrow Z_B[01, R, i\ell], & Z_B[11, R, i\ell] &\rightarrow Z_B[11, R, i\ell], \end{aligned} \quad (3.80)$$

この場合も fermion の時と同様に図 3 の解釈から納得できる。

3.4 free compact boson / free massless fermion 双対性

このセクションではトーラスにおける massless free fermion と free compact boson の対応を考察しよう。局所的な演算子対応 (2.58) より、free compact boson は free の Dirac fermion と双対のはずである。massless free Dirac fermion の分配関数は (3.41) の結果より以下の通り¹⁶。

トーラス上の massless free Dirac fermion の分配関数

$$\begin{aligned} Z_F[AA] &= \left| \frac{\vartheta_3(\tau)}{\eta(\tau)} \right|^2, & Z_F[AP] &= \left| \frac{\vartheta_2(\tau)}{\eta(\tau)} \right|^2, \\ Z_F[PA] &= \left| \frac{\vartheta_4(\tau)}{\eta(\tau)} \right|^2, & Z_F[PP] &= 0 \left(= \left| \frac{\vartheta_1(\tau)}{\eta(\tau)} \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.81)$$

この分配関数と boson 側の結果 (3.79) を比較してみよう。どうやら、これらの分配関数は fermion 側と boson 側とでそのままでは一致していないように見える。そもそも、fermion の

¹⁶ Dirac fermion は Majorana fermion 二つ分 ($\psi = \psi_1 + i\psi_2$) なので Majorana fermion の分配関数を二乗しないといけないことに注意。

場合はトーラスの spin structure に依存するが、boson の場合は依存しないという違いがある。fermion 側の分配関数が boson 側と一致するためには少なくとも spin structure に依らないようにする必要がある。そこで、試しに fermion 側で全ての spin structure の分配関数を足し上げてみよう。簡単のため $\tau = i\ell$ として計算すると、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (Z_F[AA] + Z_F[AP] + Z_F[PA] + Z_F[PP]) \\
 &= \frac{1}{2\eta^2(i\ell)} (\vartheta_2^2(i\ell) + \vartheta_3^2(i\ell) + \vartheta_4^2(i\ell)) , \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\eta^2(i\ell)} (\vartheta_3^4(i\ell) + \vartheta_2^2(i\ell)\vartheta_3^2(i\ell) + \vartheta_3^2(i\ell)\vartheta_4^2(i\ell) + \vartheta_4^2(i\ell)\vartheta_2^2(i\ell))^{1/2} , \\
 &= \vartheta_3\left(\frac{i\ell}{2}\right) \vartheta_3(2i\ell) , \\
 &= Z_B[00, R = 2, i\ell] ,
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

となり、boson 側の分配関数に一致した。ここで、2 行目から 3 行目にかけては theta 関数の公式 (B.3) を用い、3 行目から 4 行目にかけては (B.5), (B.6) を用いた。また、今度は boson 側の分配関数から fermion の分配関数を再現することを考えてみよう。例えば以下のような和を計算すると、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (Z_B[00, 2, i\ell] + Z_B[01, 2, i\ell] + Z_B[10, 2, i\ell] - Z_B[11, 2, i\ell]) \\
 &= \frac{1}{2\eta^2(i\ell)} \left(\vartheta_3\left(\frac{i\ell}{2}\right) (\vartheta_3(2i\ell) + \vartheta_2(2i\ell)) + \vartheta_4\left(\frac{i\ell}{2}\right) (\vartheta_3(2i\ell) - \vartheta_2(2i\ell)) \right) , \\
 &= \frac{\vartheta_3^2(i\ell)}{\eta^2(i\ell)} , \\
 &= Z_F[AA] .
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

と fermion 側の分配関数と一致した。ここで、2 行目から 3 行目にかけては theta 関数の公式 (B.3), (B.5), (B.6) と、恒等式 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$ を用いた。

この具体例からわかるように、トーラスのように非自明なサイクルを持った時空の場合、 \mathbb{Z}_2 ゲージ場に関する足しあげ (fermion では spin structure に関する足しあげと等価) が必要であることが推測できる。一般に非自明なサイクルを持つ時空におけるボソン/フェルミオン双対性ではこのような “ \mathbb{Z}_2 ゲージ化” が必要である。さらに \mathbb{Z}_2 ゲージ化を行う際に、 \mathbb{Z}_2 ゲージ場に依存した重みで足しあげる必要があることがわかった。

3.5 ボソン/フェルミオン双対性の辞書

前のセクションではトーラス上の massless free fermion と free compact boson の分配関数を計算し、それら一致するためには適切な重みをかけながら \mathbb{Z}_2 ゲージ化を行う必要があると推測できた。先行研究 [20, 21]、ではこのような対応に関するより精密な議論がなされ、現在では時空に非自明なサイクルがある場合のボソン/フェルミオン双対性の辞書が知られている。boson

から fermion を構成する辞書は模式的に書くと以下のようになる。

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{B} \times (\text{Kitaev})}{\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}} . \quad (3.84)$$

ここで、(Kitaev) は後で説明する TQFT であり、 $\frac{1}{\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}}$ は boson 側での $\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}$ ゲージ化を表す。このセクションではこれについて詳しく説明しよう。正確なボソン/フェルミオン双対性の辞書は以下で与えられる。

フェルミオン化の辞書:

非自明なサイクルのあるリーマン面の場合、boson の分配関数から対応する fermion の分配関数を構成する方法は以下で与えられる。

$$Z_F[S \cdot \rho] = \frac{1}{2^g} \sum_t Z_B[t] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[t \cdot \rho] + \text{Arf}[\rho] + \int t \cup S \right) \right] . \quad (3.85)$$

ここで ρ は考えている Riemann 面 X の spin structure、 $S \in H^1(X, \mathbb{Z}_2^{\mathcal{F}})$ は $\mathbb{Z}_2^{\mathcal{F}}$ 対称性に対する background 離散ゲージ場である。 $t \in H^1(X, \mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}})$ は $\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}$ 対称性に対する dynamical な離散ゲージ場であり、 \sum_t はとりうる全ての configuration についても和を表す。また、 $\text{Arf}[\rho]$ は Arf invariant と呼ばれる量であり、2 次元の場合 mod 2 index $I[\rho]$ と値が等しい。

$$\text{Arf}[\rho] = I[\rho] . \quad (3.86)$$

この辞書はさまざまなモデルを調べる上でこれではないかと類推されて得られたものである。そういう意味で完璧な証明はないのでひとまず受け入れることを勧める。これ以降はこの辞書の使い方を具体例を挿みながら解説していく。

まずは $S \cdot \rho$ といった表記法について説明する。 \mathbb{Z}_2 ゲージ場の holonomy は fermion 場の境界条件に寄与するため、元々の spin structure と \mathbb{Z}_2 ゲージ場の寄与を合わせて $S \cdot \rho$ と表記している。以下の torus の例をみるとわかりやすいだろう。

具体例：トーラス

図 1 ようにトーラスの 2 つの cycle を γ_0, γ_1 と呼ぶとする。

例えば spin structure が $\rho = AA$ とする。 \mathbb{Z}_2 ゲージ場の holonomy を $S_i = \oint_{\gamma_i} S \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1$ とすると、 $S \cdot \rho$ は \mathbb{Z}_2 ゲージ場の値 $S = (S_0, S_1)$ に応じて以下のようなになる。

$$\begin{aligned} (0, 0) \cdot AA &= AA, \\ (0, 1) \cdot AA &= AP, \\ (1, 0) \cdot AA &= PA, \\ (1, 1) \cdot AA &= PP. \end{aligned} \quad (3.87)$$

より genus が多い場合も同様である。

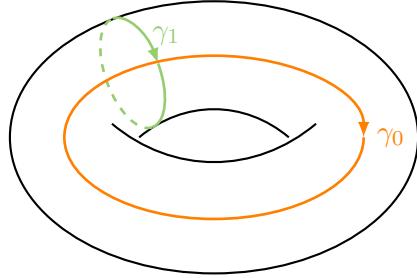


図 4. トーラスの図。 γ^0, γ^1 はトーラスの非自明な 2 つのサイクルを表す。

Arf invariant やカップ積に関しては具体例を見ていくのが良いだろう。2 次元の場合、Arf invariant と mod 2 index と等価であるためこの修士論文では特に区別せず使う。トーラスの場合 Arf invariant は以下のような値になる。

トーラスの場合の $\text{Arf}[\varrho]$ の値：

$$\text{Arf}[\varrho] = \begin{cases} 0 & \varrho = \text{AP, PA, AA}, \\ 1 & \varrho = \text{PP}. \end{cases} \quad (3.88)$$

Proof. ここでは mod 2 index として Arf invariant を計算してみよう。mod 2 index は以下のように計算できる。

$$I[\varrho] = (\mathcal{D}_\varrho \psi = 0 \text{ の解の個数}) \bmod 2. \quad (3.89)$$

具体的に $\mathcal{D}_\varrho \psi = 0$ を解く。ガンマ行列の具体形 (3.20) を用いると、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varrho \psi &= (\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1) \psi = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \bar{\psi}(\bar{z}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_z \psi(z) \\ \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}(\bar{z}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.90)$$

よって、これがゼロとなるためには $\psi = \text{const}$ しか許されない。 $\psi = \text{const}$ の解は自明に $\psi(z+1) = \psi(z), \psi(z+\tau) = \psi(z)$ となる。よって、 $\varrho = \text{PP}$ の解は const の一つ、 $\varrho = \text{PA, AP, AA}$ は解が無い(解が 0 つ)。よって、mod 2 index の値は (3.88) となる。□

最後に、カップ積 $\int t \cup S$ についてコメントする。カップ積は cohomology で数学的に定義されているが、我々としては通常のウェッジ積として扱って問題ない。これもトーラスの具体例を見るとイメージが湧きやすいだろう。

トーラスにおけるカップ積 $\int t \cup S$:
トーラスの場合カップ積 $\int t \cup S$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int t \cup S &= \int_{\gamma^0} t \cdot \int_{\gamma^1} S - \int_{\gamma^1} t \cdot \int_{\gamma^0} S \\ &= t_0 S_1 - t_1 S_0 ,\end{aligned}\tag{3.91}$$

ここで、 $S_i, t_i, i = 0, 1$ は Torus のループ γ^1 に関する holonomy(図 4 参照) である;

$$t_i := \oint_{\gamma^i} t, \quad S_i := \oint_{\gamma^i} S \tag{3.92}$$

S_i, t_i は \mathbb{Z}_2 ゲージ場であるため 0 か 1 の値しか取らない。例えばゲージ場の configuration が $S = (01), t = (11)$ の時、 $\int t \cup S$ の値は

$$\int t \cup S = t_0 S_1 - t_1 S_0 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1 ,$$

となる。

このようにしてフェルミオン化の辞書 (3.85) の TQFT factor (Kitaev) を計算し、ゲージ化を行うことで boson から fermion を構成することができる。

また、少し余談をすると逆に fermion から boson を構成することもできる。これはボソン化と呼ばれる操作である。ボソン化の辞書は以下の通り。

ボソン化の辞書:

$$Z_B[T] = \frac{1}{2^g} \sum_s Z_F[s \cdot \rho] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[T \cdot \rho] + \text{Arf}[\rho] + \int s \cup T \right) \right] \tag{3.93}$$

これはフェルミオン化の辞書 (3.85) から導くことができる¹⁷。

Proof. 証明には A にまとめた Arf invariant の公式を用いる。(3.85) を仮定して、(3.93) の

¹⁷ フェルミオン化の辞書 (3.85) とボソン化の辞書 (3.93) はフーリエ変換、逆フーリエ変換の関係に似ている。逆操作ができるという意味でもフェルミオン化、ボソン化の辞書がよく考えて作られているものだと言える。

右辺を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
((3.93) \text{ の右辺}) &= \frac{1}{2^g} \sum_s Z_{\mathcal{F}}[s \cdot \rho] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[T \cdot \rho] + \text{Arf}[\rho] + \int s \cup T \right) \right], \\
&= \frac{1}{2^{2g}} \sum_{s,t} Z_B[t] \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[t \cdot \rho] + \text{Arf}[T \cdot \rho] + \underbrace{2\text{Arf}[\rho]}_{=0} + \int s \cup (T \xrightarrow{\rightarrow t} t) \right) \right], \\
&= \frac{1}{2^{2g}} \sum_{s,t} Z_B[t] \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[t \cdot \rho] + \text{Arf}[T \cdot \rho] + \int s \cup (T - t) \right) \right],
\end{aligned}$$

ここで、 $\text{Arf}[\rho]$ と $\int s \cup t$ が 0 か 1 の値しか取らないことに加え、 $\exp(i\pi \#)$ の形から mod 2 で式を評価して良いことを用いた ($e^{i\pi}$ と $e^{-i\pi}$, $e^{3i\pi}$, … は同じ)。さらに公式 (A.3) を用いると、

$$\begin{aligned}
((3.93) \text{ の右辺}) &= \sum_t Z_B[t] \exp [i\pi (\text{Arf}[t \cdot \rho] + \text{Arf}[T \cdot \rho])] \cdot \delta_{T,t}, \\
&= Z_B[T] \exp \left[i\pi \underbrace{(2\text{Arf}[t \cdot \rho])}_{=0} \right], \\
&= Z_B[T], \\
&= ((3.93) \text{ の左辺}). \tag{3.94}
\end{aligned}$$

よってフェルミオン化の辞書から bosonization の辞書が示せた。逆も同様に示せる。□

さらに、こうして作られた boson の分配関数は spin structure に依らない。Boson の理論は当然 spin structure に依らないのでこれは consistent な結果である。念の為下で証明しておく。

$Z_B[T]$ が spin structure に依らないこと：

$\varrho' = \varrho \cdot T'$ (T' は任意の値を持つ \mathbb{Z}_2 ゲージ場) として Bosonization の辞書 (3.93) を用いると、

$$\begin{aligned}
Z_B[T; \varrho'] &= \frac{1}{2^g} \sum_s Z_{\mathcal{F}}[s \cdot \varrho'] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[T \cdot \varrho'] + \text{Arf}[\varrho'] + \int s \cup T \right) \right], \\
&= \frac{1}{2^g} \sum_s Z_{\mathcal{F}}[(s + T') \cdot \varrho] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[(T + T') \cdot \varrho] + \text{Arf}[T' \cdot \varrho] + \int s \cup T \right) \right],
\end{aligned}$$

ここで和の変数を $s \rightarrow s' = s + T'$ と変換すると、

$$Z_B[T; \varrho'] = \frac{1}{2^g} \sum_{s'} Z_{\mathcal{F}}[s' \cdot \varrho] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[(T + T') \cdot \varrho] + \text{Arf}[T' \cdot \varrho] + \int (s' - T') \cup T \right) \right],$$

さらに公式 (A.2) を用いて計算をすると、

$$\begin{aligned}
 Z_B[T; \varrho'] &= \frac{1}{2^g} \sum_{s'} Z_F[s' \cdot \varrho] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[T \cdot \varrho] + 2\text{Arf}[T' \cdot \varrho] + \text{Arf}[\varrho] + \int s' \cup T \right) \right], \\
 &= \frac{1}{2^g} \sum_{s'} Z_F[s' \cdot \varrho] \cdot \exp \left[i\pi \left(\text{Arf}[T \cdot \varrho] + \text{Arf}[\varrho] + \int s' \cup T \right) \right], \\
 &= Z_B[T; \varrho].
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

よって、bosonization の辞書 (3.93) は spin structure に依らないことが示せた。

3.6 free compact boson model / massless Thirring model

それではこのセクションの最後にボソン/フェルミオン双対性の応用例として以下の massless Thirring model を扱ってみよう [26]。

massless Thirring model

$$\text{作用 : } I[\lambda, \tau] = \int_T d^2x \left[i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{\pi}{2} \lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right], \tag{3.96}$$

ψ : Dirac fermion, λ : Thirring coupling

$$\mathbb{Z}_2^F\text{対称性} : \psi \rightarrow -\psi. \tag{3.97}$$

見ての通りこのモデルには fermion の 4 点相互作用が含まれており、そのまま分配関数を求めるのは非常に困難である。しかし、ボソン/フェルミオン双対性を用いるとこれを厳密に解くことができる。まずは演算子対応 (2.48) を用いて massless Thirring model と双対な boson のモデルを特定してみよう。ラグランジアンの項は

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi} \not{\partial} \psi &\iff \frac{1}{8\pi} (\partial\phi)^2, \\
 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &\iff \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

と対応することを用いると fermion の相互作用項は boson 側で見ると kinetic な項になってしまふ。これより、massless Thirring model は以下の free compact boson と等価である [19, 20]¹⁸。

¹⁸ 実は単純な係数比較だけでは $R^2 = 1 + \lambda$ となるが、実際は $\frac{4}{R^2} = 1 + \lambda$ が正しい。これをちゃんと説明するには込み入った議論が必要なのでここでは避けた。[20] の sec 3.5 ではこのあたりの議論を（わかりづらく）書いている。

free compact boson model (\iff massless Thirring model)

$$\text{作用 : } I[R] = \frac{R^2}{8\pi} \int_{\mathbf{T}} d^2x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi , \quad (3.99)$$

$\phi \sim \phi + 2\pi$: compact boson,

$$\frac{4}{R^2} = 1 + \lambda , \quad (3.100)$$

$$\mathbb{Z}_2^B \text{対称性 : } \phi \rightarrow \phi + \pi . \quad (3.101)$$

それでは実際にフェルミオン化の辞書を使って massless Thirring model の分配関数 $Z_F[\varrho, \lambda, i\ell]$ を計算してみよう。今回はトーラスの spin structure を $\varrho = AA$ とする。この時、フェルミオン化の辞書 (3.85) を具体的に使うと以下のようになる。

$$\begin{aligned} Z_F[AA, \lambda, i\ell] &= \frac{1}{2} \sum_{t \in H^1(\mathbf{T}, \mathbb{Z}_2)} Z_B[t, R, i\ell] \cdot \exp [i\pi (\text{Arf}[t \cdot AA] + \text{Arf}[AA])] \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} Z_B[00, R, i\ell] \cdot \exp [2i\pi \text{Arf}[AA]] \\ + Z_B[01, R, i\ell] \cdot \exp [i\pi (\text{Arf}[AP] + \text{Arf}[AA])] \\ + Z_B[10, R, i\ell] \cdot \exp [i\pi (\text{Arf}[PA] + \text{Arf}[AA])] \\ + Z_B[11, R, i\ell] \cdot \exp [i\pi (\text{Arf}[PP] + \text{Arf}[AA])] \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} (Z_B[00, R, i\ell] + Z_B[01, R, i\ell] + Z_B[10, R, i\ell] - Z_B[11, R, i\ell]) . \quad (3.102) \end{aligned}$$

ここで、トーラスにおける Arf invariant の値 (3.88) を用いた。この式にセクション 3.5 で求めた compact boson の分配関数の式 (3.79) を代入すると最終的に以下の結果を得る。

massless Thirring model の分配関数 :

$$Z_F[AA, \lambda, i\ell] = \frac{1}{\sqrt{2} \eta(i\ell)^2} \left[\sum_{j=2}^4 \Xi_j(\lambda, i\ell) \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (3.103)$$

ここで Ξ_j ($j = 2, 3, 4$) は以下のように定義した。

$$\Xi_j(\lambda, i\ell) \equiv \vartheta_j^2(i\ell(1+\lambda)) \vartheta_j^2\left(\frac{i\ell}{1+\lambda}\right) . \quad (3.104)$$

Proof. 多少難しい変形を含むので一応計算方法を書いておく。この証明では煩雑さを避け

るため以下の略記号を用いるとする。

$$\vartheta_j \equiv \vartheta_j^2 (\mathrm{i} \ell (1 + \lambda)) \quad , \quad \tilde{\vartheta}_j \equiv \vartheta_j^2 \left(\frac{\mathrm{i} \ell}{1 + \lambda} \right) \quad , \quad j = 1, 2, 3 . \quad (3.105)$$

それではフェルミオン化による公式 (3.102) を計算して行こう。まず第 1 項と第 2 項の和を theta 関数の公式 (B.5), (B.6) を用いると以下のように評価できる。

$$\begin{aligned} Z_B[00, R, \mathrm{i} \ell] + Z_B[01, R, \mathrm{i} \ell] &= \frac{1}{\eta(\mathrm{i} \ell)^2} \vartheta_3 \left(\mathrm{i} \ell \frac{1 + \lambda}{2} \right) \left[\vartheta_3 \left(\mathrm{i} \ell \frac{2}{1 + \lambda} \right) + \vartheta_2 \left(\mathrm{i} \ell \frac{2}{1 + \lambda} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \eta(\mathrm{i} \ell)^2} \left(\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2 \right)^{1/2} \left[\left(\tilde{\vartheta}_3^2 + \tilde{\vartheta}_4^2 \right)^{1/2} + \left(\tilde{\vartheta}_3^2 - \tilde{\vartheta}_4^2 \right)^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{\eta(\mathrm{i} \ell)^2} \left[\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2 \right]^{1/2} \left[\tilde{\vartheta}_3^2 + \left(\tilde{\vartheta}_3^4 - \tilde{\vartheta}_4^4 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\eta(\mathrm{i} \ell)^2} \left[\left(\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2 \right) \left(\tilde{\vartheta}_3^2 + \tilde{\vartheta}_2^2 \right) \right]^{1/2} , \end{aligned} \quad (3.106)$$

ここで 2 行目から 3 行目に移る際は初頭的な公式 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$ 、3 行目から 4 行目は theta 関数の公式 (B.3) を用いた。同様に (3.102) の第三項と第四項の和も計算すると

$$Z_B[10, \lambda, \mathrm{i} \ell] - Z_B[11, \lambda, \mathrm{i} \ell] = \frac{1}{\eta(\mathrm{i} \ell)^2} \left[\left(\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2 \right) \left(\tilde{\vartheta}_3^2 - \tilde{\vartheta}_2^2 \right) \right]^{1/2} . \quad (3.107)$$

となる。得られた式 (3.106), (3.107) を (3.102) に代入すると、

$$\begin{aligned} Z_F[\mathrm{AA}, \lambda, \mathrm{i} \ell] &= \frac{1}{2\eta(\mathrm{i} \ell)^2} \left[\left[\left(\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2 \right) \left(\tilde{\vartheta}_3^2 + \tilde{\vartheta}_2^2 \right) \right]^{1/2} + \left[\left(\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2 \right) \left(\tilde{\vartheta}_3^2 - \tilde{\vartheta}_2^2 \right) \right]^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \eta(\mathrm{i} \ell)^2} \left[\vartheta_2^2 \tilde{\vartheta}_2^2 + \vartheta_3^2 \tilde{\vartheta}_3^2 + \left[\left(\vartheta_3^4 - \vartheta_2^4 \right) \left(\tilde{\vartheta}_3^4 - \tilde{\vartheta}_2^4 \right) \right]^{1/2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \eta(\mathrm{i} \ell)^2} \left[\vartheta_2^2 \tilde{\vartheta}_2^2 + \vartheta_3^2 \tilde{\vartheta}_3^2 + \vartheta_4^2 \tilde{\vartheta}_4^2 \right] \\ &= (3.103) , \end{aligned} \quad (3.108)$$

よって、(3.103) が証明できた。 □

このようにしてボソン/フェルミオン双対性を用いて massless Thirring model の分配関数を厳密に求めることができた。相互作用を含んでいるにも関わらず分配関数が求められているのでこれは非常に重要な結果である。

最後に得られた分配関数の対称性についてコメントしておく。massless Thirring model の

分配関数 (3.103) は以下の 2 つの対称性を持つ。

$$\text{T-duality} \quad : \quad \lambda \rightarrow \lambda_{\text{dual}} \equiv -\frac{\lambda}{\lambda+1} , \quad (3.109)$$

$$\text{modular S 変換} \quad : \quad \ell \rightarrow \frac{1}{\ell} . \quad (3.110)$$

これらの対称性は後の研究のセクションで重要となる¹⁹。

Proof. T-duality については $1 + \lambda_{\text{dual}} = 1/(1 + \lambda)$ が成り立つことから自明に成り立つことが確認できる;

$$\begin{aligned} \Xi_j(\lambda_{\text{dual}}, i\ell) &= \vartheta_j^2(i\ell(1 + \lambda_{\text{dual}})) \vartheta_j^2\left(\frac{i\ell}{1 + \lambda_{\text{dual}}}\right) \\ &= \vartheta_j^2\left(\frac{i\ell}{1 + \lambda}\right) \vartheta_j^2(i\ell(1 + \lambda)) \\ &= \Xi_j(\lambda, i\ell) \end{aligned} \quad (3.111)$$

modular S 変換の対称性については theta 関数の modular 変換の性質 (B.7) を用いて示すことができる。実際、

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^4 \Xi_j(\lambda, i/\ell) &= \sum_{j=2}^4 \vartheta_j^2(i(1 + \lambda)/\ell) \vartheta_j^2\left(\frac{i}{(1 + \lambda)\ell}\right) \\ &= \ell \sum_{j=2}^4 \left[\vartheta_j^2\left(\frac{i\ell}{1 + \lambda}\right) \vartheta_j^2(i\ell(1 + \lambda)) \right] \\ &= \ell \sum_{j=2}^4 \Xi_j(\lambda, i\ell) , \\ \eta(i/\ell)^2 &= \ell \eta(i\ell) . \end{aligned} \quad (3.112)$$

と変換するので、 $Z_F[\text{AA}, \lambda, i/\ell] = Z_F[\text{AA}, \lambda, i\ell]$ となる。 \square

¹⁹この T-duality は compact boson の T-duality: $R \rightarrow \frac{2}{R}$ に起因している。時間の都合上この修士論文に書き残すことはできなかつたが、これをちゃんと導出するには boson 側で Orbifold を絡めた duality web を用いる必要がある [21]。付録 hoge の図 hoge に結果のみを示した。

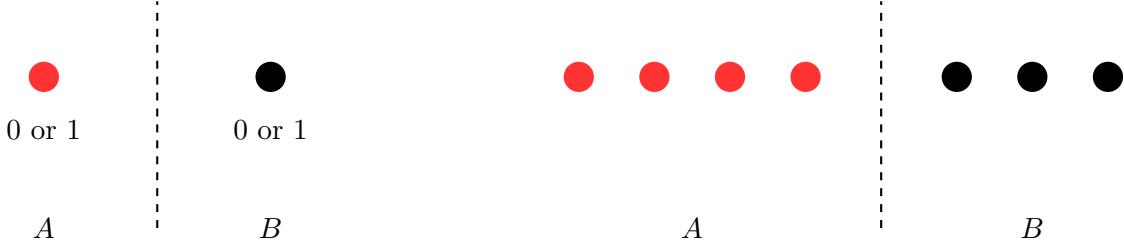


図 5. 左図：2-qubit 系の模式図。系 A(赤点) と系 B(黒点) はそれぞれ 0 か 1 の状態を取ることができ ($|\psi\rangle_A = |0\rangle_A \text{ or } |1\rangle_A$)。系 B についても同様。右図：より多自由度な場合の例。今回の場合、多数の qubit を A と B に分けた図を描いた。この場合、系 A の状態は $|1000\cdots\rangle_A$ 、 $|0100\cdots\rangle_A$ 、 $|1100\cdots\rangle_A$ など、多数ある。系 B についても同様。

Part II

エンタングルメント (Review)

このパートでは、量子論におけるエンタングルメントについてのレビューする。エンタングルメントとは一言で言うと、「古典論では説明できない量子論的な相関」である。そして、エンタングルメントの大きさを測る量がエンタングルメントエントロピー(以下、EE と略すことがある)であり、それと密接な関係のあるエンタングルメント Rényi エントロピー(ERE)である。今回はこれらについて学ぶため、まずセクション 4 では簡単な量子力学系を例にとりながら一般的な定義を述べる。その後にセクション 5 で場の量子論におけるエンタングルメントをどのように定式化するかを述べる。最後に、セクション 6,7 では本研究と関係のある先行研究についてレビューする。

4 エンタングルメントの基本

まずは量子力学におけるエンタングルメントの基本をレビューする。量子情報の教科書やレビューは無数にあるが、ここでは有名な洋書 [2] と和書の教科書 [27] を参考にした。

4.1 導入

ここでは、エンタングルメントの導入を行う。抽象的なことを述べるよりも、まずは具体的な話をした方がわかりやすいだろう。例として 2 準位系が 2 つある場合を考えてみよう²⁰。2 つの 2 準位系をそれぞれ A , B と呼ぶことにする(図 5 参照)。全体系 $A \cup B$ の状態が以下の状態(Bell 状態という)であるときを考えてみよう。

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) . \quad (4.1)$$

ここで、 $|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B = |i\rangle_A |j\rangle_B (= |ij\rangle)$ と直積記号を省略する書き方を用いた。ここで、系 B について $i = 0, 1$ の値の観測を行ったとしよう。当然、量子論の原理から、 $i = 0, 1$ の値が出

²⁰2-qubit 系と呼ぶこともある。あるいはスピン 1/2 の粒子が 2 つあると考えても良い。

る確率はそれぞれ $|{}_B\langle 0|\Psi\rangle|^2$, $|{}_B\langle 1|\Psi\rangle|^2$ である。この時状態は観測をすると量子状態の収縮が。つまり、

$$\begin{aligned} {}_B\langle 0|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A, \\ {}_B\langle 1|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A, \end{aligned} \quad (4.2)$$

となり、系 B の測定を行い、結果が 0 であった場合系 A の状態は $|0\rangle_A$ 、系 B の測定結果が 1 であった場合系 A の状態は $|1\rangle_A$ と決まってしまう。これことから、系 B の測定は系 A の状態に影響を与えており、つまり系 A と系 B は何らかの相関を持っていることがわかる。

一方、以下のような状態 $|\Psi'\rangle$ を考えてみよう。

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B + |1\rangle_B). \quad (4.3)$$

この場合、同じように系 B に関する測定を行うと以下のように状態が収縮する。

$$\begin{aligned} {}_B\langle 0|\Psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A), \\ {}_B\langle 1|\Psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A). \end{aligned} \quad (4.4)$$

今回の場合、系 B の測定結果が 0 か 1 に関係なく、系 A は同じ状態に収縮している。このような場合は系 A と系 B に相関はないように思える。

このような相関は量子論特有の現象であり、量子エンタングルメントと呼ばれている。今回は 2 つの二準位系を例にとったが、図 5 右のように多粒子系の場合でも量子エンタングルメントが考えられる。それではより一般的な量子系に対してどのように量子エンタングルメントを定式化するかを述べよう。

4.2 エンタングルメントエントロピー

このパラグラフでは量子エンタングルメントの指標であるエンタングルメントエントロピー (EE) を導入する。簡単のため、全体系の状態は純粋状態 (pure state) であると考える。すると全体系の密度行列 ρ_{tot} は全体系の状態 Ψ_{tot} を用いて以下のように書ける。

$$\rho_{\text{tot}} = |\Psi_{\text{tot}}\rangle\langle\Psi_{\text{tot}}|. \quad (4.5)$$

量子力学の復習:

全体系は pure state $|\Psi_{\text{tot}}\rangle$ だと仮定しているので、演算子 \mathcal{O}_{tot} の期待値は以下のように計算できる。

$$\langle \mathcal{O}_{\text{tot}} \rangle = \langle \Psi_{\text{tot}} | \mathcal{O}_{\text{tot}} | \Psi_{\text{tot}} \rangle \quad (4.6)$$

$$= \langle \Psi_{\text{tot}} | (\mathcal{O}_{\text{tot}} | \Psi_{\text{tot}} \rangle \langle \Psi_{\text{tot}} |) | \Psi_{\text{tot}} \rangle \quad (4.7)$$

$$= \langle \mathcal{O}_{\text{tot}} | \Psi_{\text{tot}} \rangle \langle \Psi_{\text{tot}} |. \quad (4.8)$$

ここで、 $1 = \langle \Psi_{\text{tot}} | \Psi_{\text{tot}} \rangle$ を用いた。密度行列は任意の演算子 \mathcal{O}_{tot} に対して、 $\langle \mathcal{O}_{\text{tot}} \rangle = \text{Tr} [\rho_{\text{tot}} \mathcal{O}_{\text{tot}}]$ となるものとして定義されているので、 ρ_{tot} は (4.5) で得られる。

次に、図 5 の例のように全体系を A と B に分割することを考えよう。この時、系 A の基底を $|i\rangle_A$ ($i = 1, 2, \dots, d_A$) とし、系 B の基底を $|j\rangle_B$ ($j = 1, 2, \dots, d_B$) とする。つまり、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A &= \text{Span}\{ |i\rangle_A, i = 1, 2, \dots, d_A \}, \\ \mathcal{H}_B &= \text{Span}\{ |j\rangle_B, j = 1, 2, \dots, d_B \}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

とする。また、全体系の Hilbert 空間 \mathcal{H}_{tot} は系 A の Hilbert 空間 \mathcal{H}_A と系 B の Hilbert 空間 \mathcal{H}_B の直積で表すことができるとする。

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (4.10)$$

この設定の下、我々は系 A のみにアクセスできるとする。系 A における密度行列は全体系の密度行列 ρ_{tot} から構成することができる。具体的には系 B について全ての自由度を足し上げることによって以下の系 A に対する縮約密度行列 ρ_A が定義できる²¹。

$$\rho_A := \text{Tr}_B [\rho_{\text{tot}}] = \sum_{j=1}^{d_B} {}_B \langle j | \rho_{\text{tot}} | j \rangle_B. \quad (4.11)$$

ここで、 Tr_B は系 B に関する自由度のみをトレースすることから部分トレースと呼ばれる。この縮約密度行列 ρ_A は系 A にとっての密度行列のように扱うことができる。実際、密度行列 ρ_{tot} の持つ性質 ($\text{Tr}_{A \cup B} [\rho_{\text{tot}}] = 1$, $\rho_{\text{tot}}^\dagger = \rho_{\text{tot}}$, $\rho_{\text{tot}} \geq 0$ (半正定値性)) は ρ_A のもそのまま受け継がれる。

縮約密度行列 (reduced density matrix) の性質：

$$\text{Tr}_A [\rho_A] = 1, \quad \rho_A^\dagger = \rho_A, \quad \rho_A \geq 0 \text{ (正定値性).} \quad (4.12)$$

これらの性質は ρ_A の定義 (4.11) からすぐに示せる。さらに、系 A に作用する演算子 \mathcal{O}_A の期待値 $\langle \mathcal{O}_A \rangle$ は $\text{Tr}_A [\rho_A \mathcal{O}_A]$ で計算することができる。

Proof. $\langle \mathcal{O}_A \rangle = \text{Tr}_A [\rho_A \mathcal{O}_A]$:

系 A に作用する演算子 \mathcal{O}_A は全体系で見ると $\mathcal{O} = \mathcal{O}_A \otimes \mathbf{1}_B$ と書ける ($\mathbf{1}_B$ は系 B における

²¹今、系 B については我々は干渉できないと仮定しているので、系 B をトレースアウトするのは自然である。

identity operator)。これより、 \mathcal{O}_A の期待値は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{O} \rangle &= \text{Tr}_{A \cup B} [\mathcal{O} \rho_{\text{tot}}] \\
 &= \text{Tr}_A \text{Tr}_B [\mathcal{O}_A \otimes \mathbf{1}_B \rho_{\text{tot}}] \\
 &= \text{Tr}_A \left[\mathcal{O}_A \underbrace{\text{Tr}_B [\rho_{\text{tot}}]}_{\rho_A} \right] \\
 &= \text{Tr}_A [\mathcal{O}_A \rho_A]
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

よって、 $\langle \mathcal{O}_A \rangle = \text{Tr}_A [\rho_A \mathcal{O}_A]$ が示された。 \square

この縮約密度行列 ρ_A を用いてエンタングルメントの指標であるエンタングルメントエントロピー (EE) が以下のように定義できる。

定義：エンタングルメントエントロピー (EE)

量子系を部分系 A と B に分けたとする。この時、系 A と系 B の量子エンタングルメントの大きさを表すエンタングルメントエントロピー (Entanglement entropy) は以下のように定義される。

$$S(A) := -\text{Tr}_A [\rho_A \log \rho_A] . \tag{4.14}$$

ここで、 ρ_A は系 A に関する縮約密度行列 (Reduced density matrix)。

定義からわかるように、EE は ρ_A に対する Von Neumann エントロピーの形になっている。つまり、 ρ_A の形からエンタングルメント度合いを測ることができる。もし、系 A が pure state なら $S(A)$ はゼロになり、mixed state なら正の値をとる。

$S(A)$ の具体例：

系 A が pure state の場合、ある状態 $|\tilde{i}\rangle_A$ を用いて $\rho_A = |\tilde{i}\rangle_A \langle \tilde{i}|$ と書けるため EE は

$$S(A) = -1 \cdot \log 1 = 0 . \tag{4.15}$$

とゼロになる。一方、系 A が pure state の場合、縮約密度行列は $\rho_A = \sum_{\tilde{i}} p_{\tilde{i}} |\tilde{i}\rangle_A \langle \tilde{i}|$ ， $0 \leq p_{\tilde{i}} \leq 1$ と書けるため、EE は正になる：

$$S(A) = - \sum_{\tilde{i}} p_{\tilde{i}} \cdot \log p_{\tilde{i}} \geq 0 . \tag{4.16}$$

このことを具体例を取り上げてみてみよう。

具体例 1：Bell 状態

冒頭で取り上げた Bell 状態 (4.1) を例にとり、EE を計算してみよう。この場合、密度行列

ρ_{tot} の部分トレースを取ると、

$$\begin{aligned}
 \rho_A &= \text{Tr}_B [|\Psi\rangle\langle\Psi|] \\
 &= {}_B\langle 0|\Psi\rangle\langle\Psi|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\Psi\rangle\langle\Psi|1\rangle_B \\
 &= \frac{1}{2}(|0\rangle_A\langle 0| + |1\rangle_A\langle 1|) \\
 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

ここで、 ρ_A を行列表示した。この結果を用いると、EE は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 S(A) &= -\text{Tr}_A [\rho_A \log \rho_A] \\
 &= -\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \log(1/2) & 0 \\ 0 & \log(1/2) \end{pmatrix} \right] \\
 &= \log 2.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

よって、Bell 状態の場合、EE は正の値 $\log 2$ 取ることがわかった。導入で述べたように、Bell 状態はエンタングルメントを持っている状態なので、これは妥当な結果である。

具体例 2 : separable 状態 (4.3)

今度は導入で紹介した具体例 (4.3) を扱ってみよう。導入の考察からこの状態 $|\Psi'\rangle$ はエンタングルメントがないように思えるが、この場合の EE はどうなるだろうか？まずは縮約密度行列を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
 \rho_A &= \text{Tr}_B [|\Psi'\rangle\langle\Psi'|] \\
 &= {}_B\langle 0|\Psi'\rangle\langle\Psi'|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\Psi'\rangle\langle\Psi'|1\rangle_B \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|_A + \langle 1|_A) \\
 &= |\tilde{0}\rangle_A\langle\tilde{0}|
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

ここで、新しい基底 $|\tilde{0}\rangle_A := (|0\rangle_A + |1\rangle_A)/\sqrt{2}$, $|\tilde{1}\rangle_A := (|0\rangle_A - |1\rangle_A)/\sqrt{2}$ を導入した。EE の定義にある Tr_A を計算する際にこの新しい基底を用いると、

$$\begin{aligned}
 S(A) &= -\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \log(1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

よって、この場合 EE はゼロであることがわかった。

4.3 Separable 状態 VS Entangle 状態

EE はエンタングルメントの大きさを測る指標であることが分かった。では「エンタングルメントのある状態とない状態の違い」について一般的に議論してみよう。今、全体系 $A \cup B$ は pure state であり、Hirbert 空間 \mathcal{H}_{tot} は (4.10) のように書けると仮定しているので、全体系の状態 $|\Psi_{\text{tot}}\rangle$ は一般的に以下のように書ける。

$$|\Psi_{\text{tot}}\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B . \quad (4.21)$$

ここで、 $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ はただの係数である。

4.3.1 Separable 状態

特別な例として、この係数 $\alpha_{i,j}$ が以下のように系 A と系 B で分離しているとしよう。

$$\alpha_{i,j} = \alpha_i^A \cdot \alpha_j^B \quad (\text{separable state}) . \quad (4.22)$$

このようになっている場合を "separable" と呼ぶことにしよう。この場合、全体系の状態 $|\Psi_{\text{tot}}\rangle$ は

$$|\Psi_{\text{tot}}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle , \quad (4.23)$$

$$|\Psi_A\rangle := \sum_i \alpha_i^A |i\rangle_A , \quad |\Psi_B\rangle := \sum_j \alpha_j^B |j\rangle_B .$$

と分離できる。この時、縮約密度行列 ρ_A は

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B [|\Psi_{\text{tot}}\rangle \langle \Psi_{\text{tot}}|] \\ &= |\Psi_A\rangle \langle \Psi_A| \cdot \text{Tr}_B [|\Psi_B\rangle \langle \Psi_B|] \\ &= |\Psi_A\rangle \langle \Psi_A| . \end{aligned} \quad (4.24)$$

これは系 A が pure state であることを意味し、EE もゼロとなる。実際、冒頭で扱った具体例 (4.3) も (4.23) の形をしているので、separable になっている。

4.3.2 Entangle 状態

今度は Separable でない状態、つまり $\alpha_{i,j} \neq \alpha_i^A \alpha_j^B$ となるような状態を考え、EE が正になることを見てみよう。今後の便利のため、係数 $\alpha_{i,j}$ を $(d_A \times d_B)$ 行列の成分とみなして、以下の特異値分解を行うことを考えよう。

特異値分解 (Singular Value Decomposition; SVD):
 $\alpha = (d_A \times d_B)$ 行列とする。すると、行列 α は $(d_A \times d_A)$ ユニタリー行列 U と $(d_B \times d_B)$ ユニタリー行列 V を用いて以下のように分解できる。

$$\alpha = U \Sigma V^\dagger , \quad (4.25)$$

ここで、 Σ は $(d_A \times d_B)$ 以下で与えられる対角行列：

$$\Sigma = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_{\min(d_A, d_B)}}) = \begin{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{p_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{p_{d_A}} & \\ \hline & & & \mathbf{0} \end{array} \right) & (d_A < d_B), \\ \left(\begin{array}{ccc} \sqrt{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{p_{d_B}} \\ \hline & & \mathbf{0} \end{array} \right) & (d_A \geq d_B), \end{cases} \quad (4.26)$$

これより、一般的な状態 $|\Psi_{\text{tot}}\rangle$ は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{tot}}\rangle &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \\ &= \sum_i^{d_A} \sum_j^{d_B} \sum_k^{\min(d_A, d_B)} U_{i,k} \sqrt{p_k} V_{j,k}^* |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \\ &= \sum_k^{\min(d_A, d_B)} \sqrt{p_k} |\psi_k\rangle_A \otimes |\psi_k\rangle_B . \end{aligned} \quad (4.27)$$

最後の行で $|\psi_k\rangle_A := \sum_i^{d_A} U_{i,k} |i\rangle_A$, $|\psi_k\rangle_B := \sum_j^{d_B} V_{j,k}^* |j\rangle_B$ とした。ただし、規格化条件 $\langle \Psi_{\text{tot}} | \Psi_{\text{tot}} \rangle = 1$ より、 $\sum_k p_k = 1$ である。このような分解は Schmidt 分解と呼ばれる。この基底 $|\psi_k\rangle_A$, $|\psi_k\rangle_B$ で縮約密度行列 ρ_A を計算すると、

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B [|\Psi_{\text{tot}}\rangle \langle \Psi_{\text{tot}}|] \\ &= \sum_k^{\min(d_A, d_B)} {}_B \langle \psi_k | \Psi_{\text{tot}} \rangle \langle \Psi_{\text{tot}} | \psi_k \rangle_B \\ &= \sum_k^{\min(d_A, d_B)} p_k |\psi_k\rangle_A \langle \psi_k| . \end{aligned} \quad (4.28)$$

これは系 A が一般には mixed state であることを意味している。EE も同様に計算すると、

$$S(A) = - \sum_k^{\min(d_A, d_B)} p_k \log p_k , \quad (4.29)$$

となる。これは p_k を確率分布とみなすと Shannon entropy になっている。つまり、 p_k の分布がまだらであればあるほど $S(A)$ の値は大きくなる。実際、この $S(A)$ 係数が ($p_1 = p_2 = \dots$)

となっているとき、 $S(A)$ 最大値をとる：

$$\max(S(A)) = \log \min(d_A, d_B) , \quad \text{at} \quad p_k = \frac{1}{\min(d_A, d_B)} \quad \text{for all } k , \quad (4.30)$$

Proof. $S(A)$ を $\{p_k\}$ の関数ととらえ、 $\sum_k p_k = 1$ という constraint 付きの最大値問題と考えれば良い。Lagrange の未定乗数法を用いると以下の関数 $\tilde{S}_A(\{p_k\})$ の停留値を取れば良い。 $\min(d_A, d_B)$ と書くのが煩わしいため d と置く。

$$\tilde{S}_A(\{p_k\}) := - \sum_k^d p_k \log p_k + \lambda \left(\sum_k^d p_k - 1 \right) , \quad (4.31)$$

停留値を求めるため $\frac{\partial \tilde{S}_A}{\partial p_k} = 0$ と置くと ($k = 1, 2, \dots, d$)

$$p_k = e^{\lambda-1} , \quad (4.32)$$

を得る。これより、停留値を取る p_k は k によらないことがわかった。よって、 $\sum_{k=1}^d = 1$ の制限から $p_k = 1/d$ であることがわかり、その停留値は、

$$\tilde{S}_A(\{p_k = 1/d\}) = \log d , \quad (4.33)$$

となる。よって、(4.30) が示せた。 \square

このことから冒頭で紹介した Bell 状態 (4.1) は 2qubit 系における Maximally entangled state であったことがわかった。最後にこのセクションの内容をまとめる。

エンタングルメントエントロピーの性質：

$$S(A) \begin{cases} = 0 & , \quad |\Psi_{\text{tot}}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle \text{ (Separable)} \longleftrightarrow \rho_A : \text{pure state}, \\ > 0 & , \quad |\Psi_{\text{tot}}\rangle \neq |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle \text{ (Entangled)} \longleftrightarrow \rho_A : \text{mixed state}. \end{cases} \quad (4.34)$$

4.4 Subadditivity と相互情報量

ここで、エンタングルメントエントロピーが満たす重要な不等式を一つ紹介したい。注目している系 A が 2 つの系 A_1, A_2 で構成されているとする ($A = A_1 \cup A_2$)。この時、以下の Subadditivity(劣加法性) が成り立つことが知られている²²。

EE の subadditivity :

$$S(A_1 \cup A_2) \leq S(A_1) + S(A_2) . \quad (4.35)$$

²² この修士論文では触れないが、Strong subadditivity(強劣加法性) と呼ばれる不等式も存在する。

Proof. 多少結構テクニカルであるが、一応証明を書いておく。

まず準備として、以下の Kullback information [28] とその正値性を紹介する。

Kullback information とその正値性：

$\sum_k p_k = \sum_k p'_k = 1$, $0 \leq p_k$, $p'_k \leq 1$ を満たす変数の組 $\{p_k\}, \{p'_k\}$ があるとする。この時、以下で定義される Kullback information $K(\{p_k\}, \{p'_k\})$ は 0 以上となる。

$$K(\{p_k\}, \{p'_k\}) := \sum_k p_k \log \left(\frac{p_k}{p'_k} \right) \geq 0 . \quad (4.36)$$

Kullback information の正値性の証明は関数の性質 $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$ を用いると割とすぐできる：

$$K(\{p_k\}, \{p'_k\}) = \sum_k p_k \log(p_k/p'_k) \geq \sum_k p_k (1 - p'_k/p_k) = \sum_k p_k - \sum_k p'_k = 0 . \quad (4.37)$$

これを念頭に、 $S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cup A_2)$ を変形してみよう。

$$\begin{aligned} S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cup A_2) &= \text{Tr}_{A_1 \cup A_2} [\rho_{A_1 \cup A_2} \log \rho_{A_1 \cup A_2}] \\ &\quad - \text{Tr}_{A_1} [\rho_{A_1} \log \rho_{A_1}] - \text{Tr}_{A_2} [\rho_{A_2} \log \rho_{A_2}] \\ &= \text{Tr}_{A_1 \cup A_2} [\rho_{A_1 \cup A_2} \log \rho_{A_1 \cup A_2}] \\ &\quad - \text{Tr}_{A_1 \cup A_2} [\rho_{A_1 \cup A_2} \log (\rho_{A_1} \otimes \mathbf{1}_B)] - \text{Tr}_{A_1 \cup A_2} [\rho_{A_1 \cup A_2} \log (\mathbf{1}_A \otimes \rho_{A_2})] \\ &= \text{Tr}_{A_1 \cup A_2} [\rho_{A_1 \cup A_2} \{\log \rho_{A_1 \cup A_2} - \log (\rho_{A_1} \otimes \rho_{A_2})\}] . \end{aligned} \quad (4.38)$$

ここで、 $\rho_{A_1 \cup A_2}$, $\rho_{A_1} \otimes \rho_{A_2}$ が対角行列になるような基底をそれぞれ $\{|k\rangle\}, \{|\tilde{k}\rangle\}$ とする。つまり、

$$\rho_{A_1 \cup A_2} = \sum_k p_k |k\rangle \langle k| , \quad \rho_{A_1} \otimes \rho_{A_2} = \sum_k \tilde{p}_k |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}| . \quad (4.39)$$

ここで固有値 $\{p_k\}, \{\tilde{p}_k\}$ は縮約密度行列の性質 (4.12) から $\sum_k p_k = \sum_k \tilde{p}_k = 1$, $0 \leq p_k, \tilde{p}_k \leq 1$ である。これらの基底を用いて、トレースを計算すると、

$$\begin{aligned} S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cup A_2) &= \sum_k p_k \log p_k - \sum_k p_k \langle k | \log(\rho_{A_1} \otimes \rho_{A_2}) | k \rangle \\ &= \sum_k p_k \log p_k - \sum_{k,l} p_k \langle k | l \rangle \langle l | k \rangle \log \tilde{p}_l . \end{aligned}$$

ここからさらに \log の凸性を用いて式を評価する。上に凸関数な関数 $f(x)$ は、 $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$, $0 \leq t \leq 1$ が成り立つ。これを何度も用いると、 $f(\sum_l t_l x_l) \geq \sum_l t_l f(x_l)$, $\sum_l t_l = 1$ となる。 \log は上に凸であるので、この不等式を用いると、

$$\begin{aligned} S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cup A_2) &= \sum_k p_k \log p_k - \sum_l \underbrace{\sum_k p_k \langle k | l \rangle \langle l | k \rangle \log \tilde{p}_l}_{=t_l} \\ &\geq \sum_k p_k \log p_k - \sum_l \log \left(\sum_k p_k |\langle k | l \rangle|^2 \tilde{p}_l \right) . \end{aligned}$$

ここで、 $p'_l = \sum_k p_k |\langle k | l \rangle|^2$ と置くと、

$$S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cup A_2) \geq \sum_k p_k \log \left(\frac{p_k}{p'_k} \right). \quad (4.40)$$

となる。 p'_k は定義から正の数であり、 $\sum_k p'_k = \sum_{k,l} p_l \langle l | k \rangle \langle k | l \rangle = \sum_l p_l = 1$ である。よって (4.40) は Kullback information の形と一致しており、正定値性 (4.36) から subadditivity (4.35) が従う。

□

この不等式から、以下の相互情報量 (Mutual information) が自然に定義できる。

定義：相互情報量 (mutual information)

全体系を A と B に分割し、部分系 A がさらに $A = A_1 \cup A_2$ と分割されているとする。この時、部分系 A_1 と A_2 に関する相互情報量 $I(A_1, A_2)$ は以下のように定義される。

$$I(A_1, A_2) := S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cup A_2). \quad (4.41)$$

相互情報量は EE の subadditivity から $I(A_1, A_2) \geq 0$ である。また、量子エンタングルメントを \leftrightarrow で表すと、

$$\begin{aligned} I(A_1, A_2) &= \left(\begin{array}{c} B \\ A_1 \xrightarrow{\quad} A_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} B \\ A_1 \xleftarrow{\quad} A_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} B \\ A_1 \leftrightarrow A_2 \end{array} \right), \\ &= \left(\begin{array}{c} B \\ A_1 \leftrightarrow A_2 \end{array} \right), \end{aligned}$$

という形になっている。よって相互情報量 $I(A_1, A_2)$ は系 A_1 と系 A_2 の間のエンタングルメントの大きさを測る量である。この相互情報量は後で何度も用いる。

4.5 エンタングルメント Rényi エントロピー

ここまで話で EE がエンタングルメントを測る指標であることを学んだ。量子情報量は他にもあり、ここではエンタングルメント Rényi エントロピー (以下、ERE と略す) を紹介しよう。ERE は EE に自然数のパラメータ n を加えた一般化になっており、定義は以下で与えられる。

定義：エンタングルメント Rényi エントロピー

$$S_n(A) := \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}_A [\rho_A^n]. \quad (4.42)$$

ここで、 n は自然数、 ρ_A は系 A に関する縮約密度行列である。

この ERE は EE と密接な関係がある。ERE の元々の定義は自然数 n が用いられているが、 $n \in \mathbb{R}$ と定義を実数に拡張し、 $n \rightarrow 1$ の極限を取ると EE に一致する。

ERE と EE の関係：

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_n(A) = S(A) . \quad (4.43)$$

Proof. 今、ERE の定義を $n \in \mathbb{R}$ と拡張し、 $n = 1 + \Delta n$ と置く。テイラー展開 $a^{1+x} = a + xa \log a + \mathcal{O}(x^2)$ を用いると ERE は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \frac{1}{-\Delta n} \log \text{Tr}_A [\rho_A^{1+\Delta n}] \\ &= -\frac{1}{\Delta n} \log \text{Tr}_A [\rho_A + \Delta n \rho_A \log \rho_A + \mathcal{O}(\Delta n^2)] \\ &= -\frac{1}{\Delta n} \log (1 + \Delta n \text{Tr}_A [\rho_A \log \rho_A] + \mathcal{O}(\Delta n^2)) . \end{aligned} \quad (4.44)$$

最後の変形では $\text{Tr}_A [\rho_A] = 1$ を用いた。さらにテイラー展開 $\log(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ を用いると、

$$S_n(A) = \underbrace{-\text{Tr}_A [\rho_A \log \rho_A]}_{=S(A)} + \mathcal{O}(\Delta n) , \quad (4.45)$$

よって、 $\Delta n \rightarrow 0$ とすると、(4.43)を得る。 \square

一般に ERE は EE よりも計算がしやすい傾向がある。特に場の量子論において、ERE は後で述べるレプリカ法と非常に相性が良い。そのため、多くの文献ではまず ERE を求めてから、 $n \rightarrow 1$ の極限を取ることで EE を求めている²³。

また、ERE により自然に以下の相互 Rényi 情報量(以下 MRI と略す)を定義できる。

定義：相互 Rényi 情報量 (mutual Rényi information)

$$I_n(A_1, A_2) := S_n(A_1) + S_n(A_2) - S_n(A_1 \cup A_2) . \quad (4.46)$$

これは相互情報量(4.41)の一般化となっており、ERE と同様に $\lim_{n \rightarrow 1} I_n(A_1, A_2) = I(A_1, A_2)$

²³ これは余談だが、ERE は熱力学のエントロピーと同様の不等式を満たすことが知られている。ここでパラメーター n は逆温度に対応する。詳しくは [29] を参照。

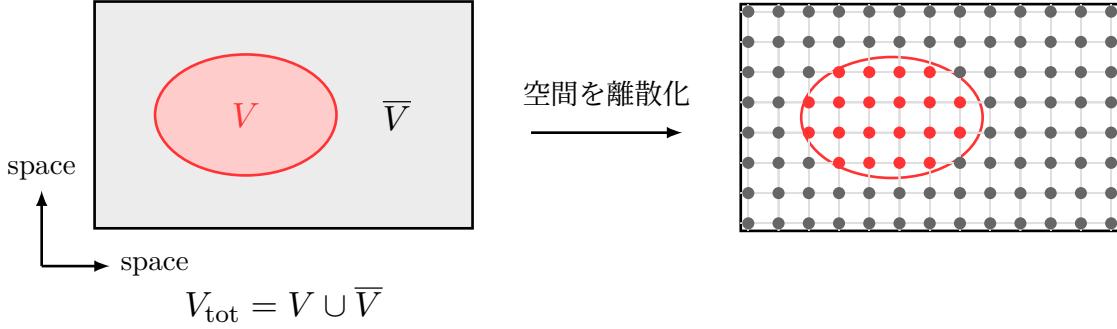


図 6. 全空間 V_{tot} を部分空間 V (red) とその補空間 \bar{V} (gray) に分割した場合の模式図(左図)。場の量子論の場合、場は空間の各点に自由度を持つ。例えば、右図のように空間を離散化して考えると、それぞれの格子点上に自由度がある。

が成り立つ。また、場の量子論は無限自由度なため EE や ERE は UV 発散するが相互 Rényi 情報量はそのような UV 発散を含まず有限の値を取ることが知られている [18]。我々の研究(セクション III)では ERE と MRI を主に扱う。

5 場の量子論における計算手法：レプリカ法

このセクションでは場の量子論におけるエンタングルメントを導入し、最も有名な計算手法であるレプリカ法を説明する [12]。量子力学系で系を A と B に分けたのと同様に、空間 V_{tot} を領域 V とその補空間 \bar{V} に分割してみよう(図 6)。場の量子論の場合それぞれの領域の自由度は無数にある。レプリカ法はこの無限自由度の部分トレースを経路積分によって評価し、ERE を求める手法である²⁴。以下の説明はレビュー論文 [30] と [31] を参考にした。

5.1 縮約密度行列 ρ_V の経路積分表示

それではレプリカ法の説明に入ろう。ここでは縮約密度行列 ρ_V を経路積分表示する。レプリカ法は boson か fermion かで少し話が異なるが、今回は fermion を想定した議論をする。boson のレプリカ法は fermion の場合より簡単なので、fermion が分かれれば十分である。

今、Euclid 時空を \mathbb{R}^d とし、座標を (x, t_E) とする ($x \in \mathbb{R}^{d-1}$: 空間座標、 $t_E \in \mathbb{R}$: Euclid 時間)。簡単のため、全体系 $V_{\text{tot}} = V \cup \bar{V}$ は真空状態 $|0\rangle$ にあるとする。ここで、領域 V と \bar{V} を図 7 のように図示する。図示の都合上空間が 1 次元の場合を描いているが、これから行うレプリカ法の議論は高次元でも成り立つ。また、fermion 場を ψ とし、作用を $I[\psi, \bar{\psi}]$ とする。また、今考えている理論は以下の fermion parity 対称性を持つとする。

$$I[\psi, \bar{\psi}] = I[-\psi, -\bar{\psi}]. \quad (5.1)$$

²⁴ ちなみにレプリカ法を用いた数値計算をする場合は実際に図 6 右のように空間を離散化し、有限の自由度にして部分トレースを取る。

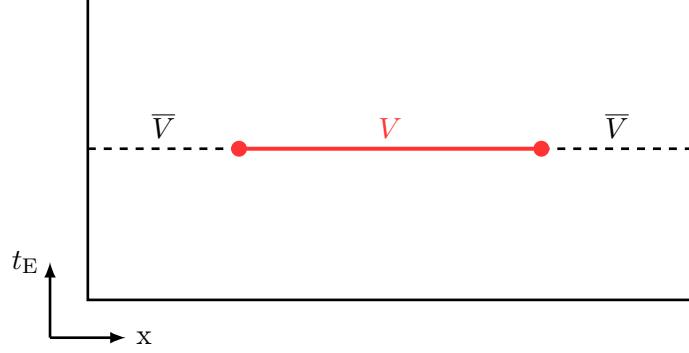


図 7. 2 次元 Euclid 時空の場合の領域 V (red) と \bar{V} (dashed) の模式図。ここで、縦軸を Euclid 時間 t_E 、横軸を空間 x とした。この絵では領域 V は single interval になっているが、一般に multi interval($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots$) となっていても良い。

レプリカ法を理解するために必要な知識は以下で述べる identity 1、トレース $\text{Tr}[\mathcal{O}]$ 、内積 $\langle 0|\psi \rangle$ の経路積分表示のみである。

$$1 = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi |\psi\rangle \langle\psi| , \quad (5.2)$$

$$\text{Tr}[\mathcal{O}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \langle -\psi | \mathcal{O} | \psi \rangle . \quad (5.3)$$

ここで、 $|\psi\rangle$ は $\hat{\psi}|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle$ を満たす状態である。fermion の場合トレースを取る際にマイナス符号が出ることに注意しよう。また、任意の状態 $|\psi_i\rangle$, $|\psi_f\rangle$ と真空 $|0\rangle$ との内積は以下のように書ける。

$$\langle 0|\psi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \int_{\psi(x,0)=\psi_i}^{\psi(x,\infty)} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-I[\psi,\bar{\psi}]} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \times \begin{array}{c} \text{[Blue shaded rectangle]} \\ \text{---} \\ \psi_i \end{array} \quad t_E = \infty . \quad (5.4)$$

$$\langle \psi_f | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \int_{\psi(x,-\infty)}^{\psi(x,0)=\psi_f} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-I[\psi,\bar{\psi}]} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \times \begin{array}{c} \text{[Blue shaded rectangle]} \\ \text{---} \\ \psi_f \end{array} \quad t_E = 0 . \quad (5.5)$$

ここで $I[\psi, \bar{\psi}]$ は Euclidean 作用である。最右辺では経路積分をグラフィカルに表現する記法を用いた。水色の領域は経路積分されている領域を表し、点線は境界条件を表す。状態 ψ_i , ψ_f の情報は経路積分では境界条件として表れる。 \mathcal{N} は規格化定数であり後で決定する。

復習：Grassmann 数の identity とトレース

(5.3) と (5.2) がすぐに納得できない人は場ではないただの Grassmann 数の identity トレースを考えてみよう。 $\hat{\psi}$ を Grassmann 数の operator とし、 $|0\rangle$, $|1\rangle$ をそれぞれ真空状態、励起状態とする (つまり $\hat{\psi}|0\rangle := 0$, $|1\rangle := \hat{\psi}^\dagger|0\rangle$ とする)。この時、 $\hat{\psi}|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle$ となる状態 $|\psi\rangle$ (coherent 状態) は $|\psi\rangle = |0\rangle - \psi|1\rangle$ と書ける。Grassmann 数の積分 $\int d\psi \psi = 1$, $\int d\psi 1 = 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \int d\psi^* d\psi |\psi\rangle \langle \psi| e^{-\psi^*\psi} &= \int d\psi^* d\psi (|0\rangle \langle 0| - |0\rangle \langle 1| \psi^* - \psi |1\rangle \langle 0| + \psi |1\rangle \langle 1| \psi^*) \underbrace{e^{-\psi^*\psi}}_{=1-\psi^*\psi} \\ &= \int d\psi^* d\psi (|0\rangle \langle 0| - |0\rangle \langle 1| \psi^* - \psi |1\rangle \langle 0| + \psi |1\rangle \langle 1| \psi^* - |0\rangle \langle 0| \psi^* \psi) \\ &= |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

また、 \hat{O} を Grassmann even な operator とすると、

$$\begin{aligned} \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^*\psi} \langle -\psi | \hat{O} | \psi \rangle &= \int d\psi^* d\psi \underbrace{e^{-\psi^*\psi}}_{=1-\psi^*\psi} (\langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle - \psi^* \langle 0 | \hat{O} | 1 \rangle - \psi \langle 1 | \hat{O} | 0 \rangle - \psi^* \psi \langle 1 | \hat{O} | 1 \rangle) \\ &= \int d\psi^* d\psi (\cancel{\langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle} - \cancel{\psi^* \langle 0 | \hat{O} | 1 \rangle} - \cancel{\psi \langle 1 | \hat{O} | 0 \rangle} - \cancel{\psi^* \psi \langle 1 | \hat{O} | 1 \rangle}) \\ &= \langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{O} | 1 \rangle \\ &= \text{Tr} [\hat{O}]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

よって、identity とトレースを Grassmann 数の積分で書くことができた。(5.2)、(5.3) はそれぞれ (5.6)、(5.7) の多変数版となっている。経路積分の表式でも $e^{-\psi^*\psi}$ に対応する項は本当は入るが、多くの文献で書くのが省略されている。

復習：Euclidean 時空における遷移振幅

(5.4), (5.5) がすぐに納得できない人は Euclidean 時空における遷移振幅を思い出してみよう。初期状態 $|\psi_i\rangle$ から Euclid 時間 β だけ時間発展し、終状態 $|\psi_f\rangle$ になる遷移振幅は以下のように書ける。

$$\langle \psi_f | e^{-\beta H} | \psi_i \rangle = \int_{\psi(x,0)=\psi_i}^{\psi(x,\beta)=\psi_f} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-I[\psi, \bar{\psi}]} = \left[\text{Blue Box} \right]_{t_E=0}^{t_E=\beta}, \quad (5.8)$$

ここで、 H は Hamiltonian である。ここで、状態 $|\psi_f\rangle$ を以下のようにエネルギー固有状態

$|n\rangle$ でモード展開したとしよう。

$$|\psi_f\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad H|n\rangle = E_n |n\rangle, \quad E_0 < E_1 < E_2 < \dots . \quad (5.9)$$

すると、 $\beta \rightarrow \infty$ の極限で (5.8) が $\langle 0 | \psi_i \rangle$ に比例することがわかる。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle \psi_f | e^{-\beta H} | \psi_i \rangle = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_n C_n \underbrace{e^{-\beta E_n}}_{e^{-\beta E_0} >> e^{-\beta E_1} >> \dots} \langle n | \psi_i \rangle \\ \propto \langle 0 | \psi_i \rangle \quad (5.10)$$

よって、(5.4) が示された。同様に $|\psi_i\rangle$ の方をモード展開し、 $\beta \rightarrow \infty$ の極限を取ると (5.5) が示せる。

これらの経路積分表示を用いて、縮約密度行列 ρ_V を経路積分表示する。後で部分トレースを取り都合上、場 $\psi_V, \psi_{\bar{V}}$ を導入する。

$$\begin{aligned}\psi_V(x) &\coloneqq \psi(x \in V, t_E = 0) \\ \psi_{\bar{V}}(x) &\coloneqq \psi(x \in \bar{V}, t_E = 0) .\end{aligned}\tag{5.11}$$

状態 $|\psi\rangle$ を $|\psi_V \oplus \psi_{\bar{V}}\rangle$ と書くとすると内積 $\langle 0| \psi_V \oplus \psi_{\bar{V}} \rangle$, $\langle \psi_V \oplus \psi_{\bar{V}} | 0 \rangle$ は以下のように経路積分で書ける。

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \psi_V \oplus \psi_{\bar{V}} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \int_{\substack{\psi(x \in V, 0) = \psi_V \\ \psi(x \in \bar{V}, 0) = \psi_{\bar{V}}}}^{\psi(x, \infty)} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-I[\psi, \bar{\psi}]} , \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \times \begin{array}{c} \text{Diagram of a rectangle filled with light blue.} \\ \text{Bottom edge labeled } \psi_{\bar{V}}, \text{ middle edge labeled } \psi_V, \text{ top edge labeled } \psi_{\bar{V}}. \\ \text{Left boundary is dashed red.} \end{array} \quad , \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\langle \psi_V \oplus \psi_{\bar{V}} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \int_{\psi(x, -\infty)}^{\psi(x \in V, 0) = \psi_V} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-I[\psi, \bar{\psi}]} ,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \times \quad , \quad (5.13)$$

$$t_E = 0$$

$$t_F = -\infty$$

場の量子論において領域 \bar{V} に関する部分トレースを $\text{Tr}_{\bar{V}}[\mathcal{O}] := \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\bar{V}} \mathcal{D}\psi_{\bar{V}} \langle -\psi_{\bar{V}} | \mathcal{O} | \psi_{\bar{V}} \rangle$ と定義すると、縮約密度行列の行列要素 $\langle \psi_V | \rho_V | \psi'_V \rangle$ は以下のように評価できる。

$$\begin{aligned}
\langle \psi_V | \rho_V | \psi'_V \rangle &= \langle \psi_V | \text{Tr}_{\bar{V}} [|0\rangle \langle 0|] | \psi'_V \rangle \\
&= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\bar{V}} \mathcal{D}\psi_{\bar{V}} \langle \psi_V \oplus (-\psi_{\bar{V}}) | 0 \rangle \langle 0 | \psi'_V \oplus \psi_{\bar{V}} \rangle , \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\bar{V}} \mathcal{D}\psi_{\bar{V}} \quad \begin{array}{c} \boxed{\psi_{\bar{V}} \quad \psi'_V \quad \psi_{\bar{V}}} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{l} t_E = \infty \\ t_E = +0 \\ t_E = -0 \\ t_E = -\infty \end{array} , \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\bar{V}} \mathcal{D}\psi_{\bar{V}} \quad \begin{array}{c} \boxed{\psi_{\bar{V}} \quad \psi'_V \quad \psi_{\bar{V}}} \\ \uparrow \quad \text{gluing} \quad \uparrow \\ \boxed{\psi_{\bar{V}} \quad -\psi_V \quad \psi_{\bar{V}}} \end{array} \quad \begin{array}{l} t_E = +0 \\ t_E = -0 \end{array} , \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \times \quad \begin{array}{c} \boxed{\psi'_V \\ -\psi_V} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{l} t_E = +0 \\ t_E = -0 \end{array} , \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{\substack{\psi(x \in V, +0) = \psi'_V \\ \psi(x \in V, -0) = -\psi_V}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-I[\psi, \bar{\psi}]} . \tag{5.14}
\end{aligned}$$

ここで、3行目から4行目に行く時に fermion parity 対称性 (5.1) を用い、 $t_E < 0$ において変数変換 $\psi \rightarrow -\psi$ を行った。4行目から5行目は経路積分の gluing 公式を用いた。

さて、それでは規格化定数 \mathcal{N} の値を決定するしよう。縮約密度行列の性質 $\text{Tr}_V[\rho_V] = 1$

を用いると、

$$\begin{aligned}
1 &= \text{Tr}_V [\rho_V] \\
&= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_V \mathcal{D}\psi_V \langle -\psi_V | \rho_V | \psi_V \rangle \\
&= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi}_V \mathcal{D}\psi_V \int_{\substack{\psi(x \in V, +0) = \psi_V \\ \psi(x \in V, -0) = -\psi_V}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-I[\psi, \bar{\psi}]} \left(= \frac{1}{N} \times \int \mathcal{D}\bar{\psi}_V \mathcal{D}\psi_V \boxed{\begin{array}{c} \psi_V \\ \hline \text{---} \\ -\psi_V \end{array}} \right) \\
&= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-I[\psi, \bar{\psi}]} \left(= \frac{1}{N} \times \boxed{\quad} \right) \\
&= \frac{1}{N} Z_1. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

ここで、分配関数を Z_1 と置いた。この式から規格化定数の値は $N = Z_1$ であることが分かった。最後に、得られた結果をまとめておこう。

縮約密度行列の経路積分表示：

$$\langle \psi_V | \rho_V | \psi'_V \rangle = \frac{1}{Z_1} \int_{\substack{\psi(x \in V, +0) = \psi'_V \\ \psi(x \in V, -0) = -\psi_V}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-I[\psi, \bar{\psi}]} \tag{5.16}$$

$$= \frac{1}{Z_1} \times \boxed{\begin{array}{c} \psi'_V \\ \hline \text{---} \\ -\psi_V \end{array}} \quad t_E = +0, t_E = -0 \tag{5.17}$$

ここで、 Z_1 はこの系の分配関数。

境界条件に現れるマイナス符号は非常に重要である。なお、boson の場合はこのようなマイナス符号は現れない。

経路積分のグラフィカル表示について：

(5.17) もそだが、我々はしばしば経路積分をグラフィカルに表記している。この表記法は計算をする上でとても便利である。もしこの表記法を用いずに数式だけで計算するととても煩雑になる。例えば (5.14) の導出を数式のみで書くと以下のようなになる。スペースの都合上

$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$ をまとめて $\mathcal{D}\psi$ と略記する。

$$\begin{aligned}
\langle \psi_V | \rho_V | \psi'_V \rangle &= \int \mathcal{D}\psi_{\bar{V}} \langle \psi_V \oplus (-\psi_{\bar{V}}) | 0 \rangle \langle 0 | \psi'_V \oplus \psi_{\bar{V}} \rangle \\
&= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\psi_{\bar{V}} \int_{\psi''(x, -\infty)}^{\psi''(x \in V, -0) = \psi_V} \mathcal{D}\psi'' e^{-I[\psi'']} \int_{\substack{\psi'''(x \in V, +0) = \psi'_V \\ \psi'''(x \in \bar{V}, +0) = \psi_{\bar{V}}}}^{\psi'''(x, \infty)} \mathcal{D}\psi''' e^{-I[\psi''']} \\
&\quad \downarrow \text{variable change : } \psi'' \rightarrow -\psi'' \\
&= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\psi_{\bar{V}} \int_{\psi''(x, -\infty)}^{\psi''(x \in \bar{V}, -0) = \psi_{\bar{V}}} \mathcal{D}\psi'' e^{-I[\psi'']} \int_{\substack{\psi'''(x \in V, +0) = \psi'_V \\ \psi'''(x \in \bar{V}, +0) = \psi_{\bar{V}}}}^{\psi'''(x, \infty)} \mathcal{D}\psi''' e^{-I[\psi''']} \\
&= \frac{1}{N} \int_{\substack{\psi(x \in V, +0) = \psi'_V \\ \psi(x \in V, -0) = -\psi_V}} \mathcal{D}\psi e^{-I[\psi]}.
\end{aligned}$$

当然 (5.14) と同じ結果にはなるが途中式が煩雑である。特に経路積分の境界条件とかごちゃごちゃしている。 $\langle \psi_V | \rho_V | \psi'_V \rangle$ の計算ならこの程度の煩雑さで済むが、より複雑な計算をする場合は数式のみで書くとしんどくなってくる。よってこれ以降は特に断らなくても経路積分をグラフィカルに表記するとする。

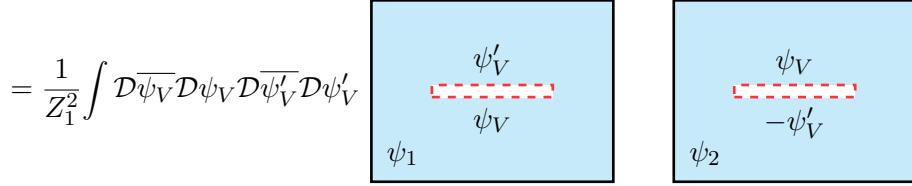
5.2 $\text{Tr}_V [\rho_V^n]$ とレプリカ多様体 Σ_n

前のセクションで縮約密度行列 ρ_V の経路積分表示を求めた。今度はこの結果を用いて、ERE に出てくる $\text{Tr}_V [\rho_V^n]$ を経路積分表示してみよう。一般の n で議論するよりもまずは $n = 2, 3$ の例を見ると良いだろう。

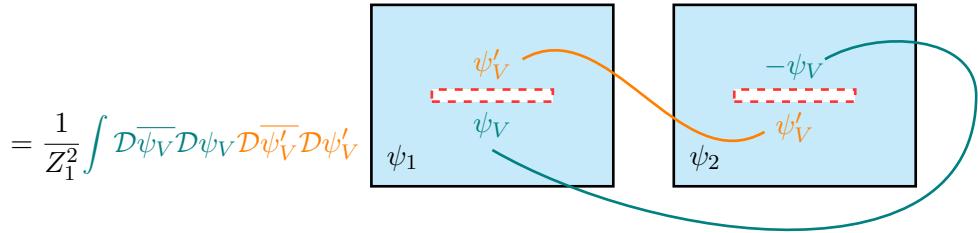
5.2.1 具体例 : $n = 2$

実際に縮約密度行列 ρ_V の経路積分表示 (5.17) から $\text{Tr}_V [\rho_V^2]$ を求めてみよう。(5.2) を用いると、

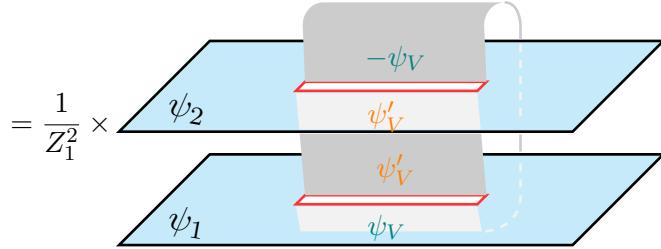
$$\text{Tr}_V [\rho_V^2] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_V \mathcal{D}\psi_V \mathcal{D}\bar{\psi}'_V \mathcal{D}\psi'_V \langle -\psi_V | \rho_V | \psi'_V \rangle \langle \psi'_V | \rho_V | \psi_V \rangle$$



\downarrow 2つ目のシートにおける変数変換 : $\psi_2 \rightarrow -\psi_2$



\downarrow gluing



$$= \frac{1}{Z_1^2} \int_{\text{B.C.}} \mathcal{D}\bar{\psi}_1 \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_2 \mathcal{D}\psi_2 e^{-I[\psi_1, \bar{\psi}_1] - I[\psi_2, \bar{\psi}_2]} . \quad (5.18)$$

このように、 $\text{Tr}_V [\rho_V^2]$ を計算する際は元々の時空を複製し、それらの時空を領域 V において適切に繋ぎ合わせれば良いことがわかる。ここで、複製された時空をシート 1、シート 2 と呼ぶことにする。(5.18) の ψ_i ($i = 1, 2$) は i 番目のシート上に定義される fermion 場である。境界条件 B.C は以下で与えられる。

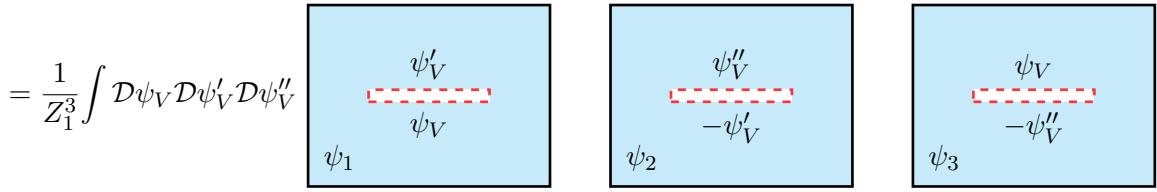
$$\text{B.C.} : \begin{pmatrix} \psi_1(x \in V, +0) \\ \psi_2(x \in V, +0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x \in V, -0) \\ \psi_2(x \in V, -0) \end{pmatrix} . \quad (5.19)$$

今回の場合、境界条件に符号反転 $\psi_2(x \in V, +0) = -\psi_1(x \in V, -0)$ が含まれることに注意しよう。

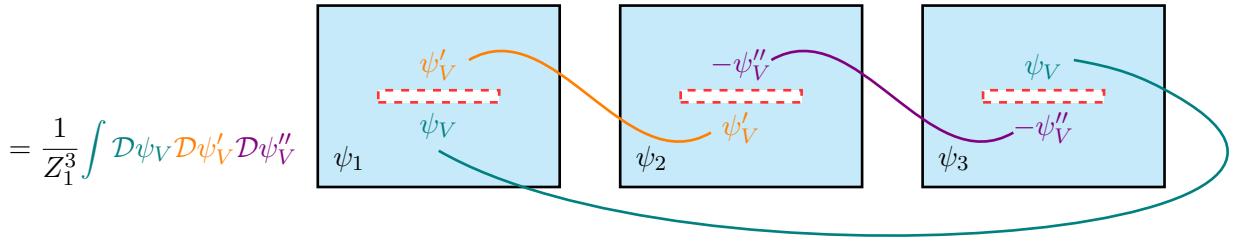
5.2.2 具体例 : $n = 3$

次に、もう一つの例である $n = 3$ を考えてみよう。同じように縮約密度行列の経路積分表示を用いて計算すると以下のようにになる。煩雑さを避けるため経路積分のメジャー $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$ を $\mathcal{D}\psi$ と略記する。

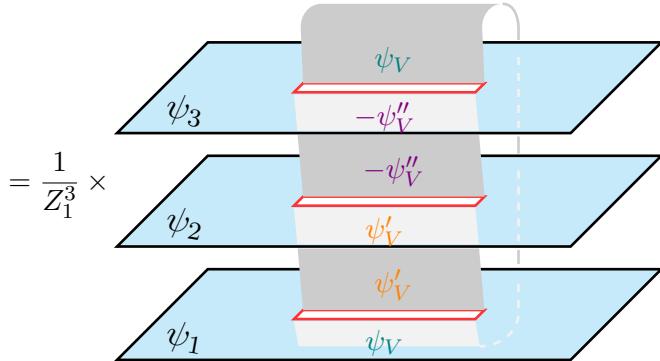
$$\text{Tr}_V [\rho_V^3] = \int \mathcal{D}\psi_V \mathcal{D}\psi'_V \mathcal{D}\psi''_V \langle -\psi_V | \rho_V | \psi'_V \rangle \langle \psi'_V | \rho_V | \psi''_V \rangle \langle \psi''_V | \rho_V | \psi_V \rangle$$



↓ 2つ目のシートにおける変数変換 : $\psi_2 \rightarrow -\psi_2$



↓ gluing



$$= \frac{1}{Z_1^3} \int_{\text{B.C.}} \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\psi_2 \mathcal{D}\psi_3 e^{-I[\psi_1, \bar{\psi}_1] - I[\psi_2, \bar{\psi}_2] - I[\psi_3, \bar{\psi}_3]} . \quad (5.20)$$

今回の場合 3 枚のシートを貼り合わせた。ここで境界条件 B.C は以下で与えられる。

$$\text{B.C.} : \begin{pmatrix} \psi_1(x \in V, +0) \\ \psi_2(x \in V, +0) \\ \psi_3(x \in V, +0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x \in V, -0) \\ \psi_2(x \in V, -0) \\ \psi_3(x \in V, -0) \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

$n = 2$ の例と違い、 $n = 3$ の場合は境界条件に符号反転がないことに注意しよう。

5.2.3 一般の n の場合

先ほど具体例として $n = 2, 3$ を扱ったが、同じような議論が一般の n についてもすることができる。要は $\text{Tr}_V [\rho_V^n]$ を計算したければ n 枚のレプリカシートを用意し、領域 V で貼り合わせれば良い。レプリカ法の主張をまとめると以下の通りである。

レプリカ法まとめ：

$$\text{Tr}_V [\rho_V^n] = \frac{Z_n}{Z_1^n} = \frac{1}{Z_1^n} \int_{\Sigma_n} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-I[\Psi, \bar{\Psi}]}, \quad (5.22)$$

ここで Z_1 は元々の時空である \mathbb{R}^d 上の分配関数であり、 Z_n は n 枚のレプリカシートで構成される多様体 Σ_n (レプリカ多様体という) 上での分配関数である (図 8)。 Ψ は k 番目のレプリカシート上に定義される場 ψ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) で構成される n 次元ベクトル場である：

$$\Psi := (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T. \quad (5.23)$$

さらに、 $I[\Psi, \bar{\Psi}]$ は以下で定義される Euclidean 作用である。

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] := \sum_{i=1}^n I[\psi_i, \bar{\psi}_i]. \quad (5.24)$$

経路積分のメジャーは $\mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} := \prod_{i=1}^n \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i$ と定義され、 $\int_{\Sigma_{n,N}}$ は以下の境界条件を意味している：

$$\Psi(x \in V, t_E = +0) = T \Psi(x \in V, t_E = -0), \quad (5.25)$$

ここで T は $n \times n$ 行列であり以下で与えられる。

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & (-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

なお、boson の場合は行列 T の左下の成分を $+1$ にすれば良い。

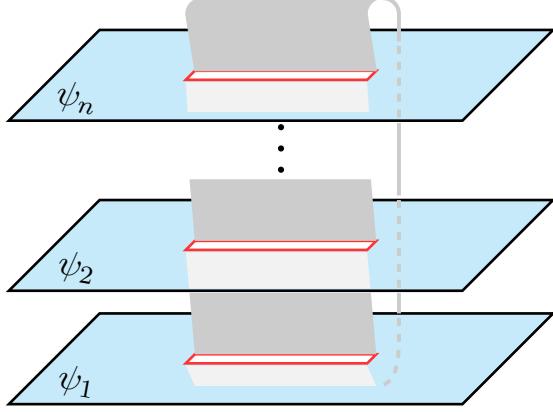


図 8. レプリカ多様体 Σ_n の図。それぞれのシートは元々の時空を表し、赤のラインは領域 V を表す。 i 番目のレプリカシートは $(i+1)$ 番目のレプリカシートと領域 V で繋ぎ合わせられている ($i = 1, 2, \dots, n, n+1 = 1$)。

5.3 ツイスト演算子による方法

前のセクションでは経路積分を用いて $\text{Tr}_V [\rho_V^n]$ をレプリカシート上の分配関数として表した。これはツイスト演算子を用いて演算子の言葉で書き直すことができる。このことについて少し考えてみよう。レプリカ法の結果を用いると、 $\text{Tr}_V [\rho_V^n]$ は以下のようないくつかの経路積分で与えられる(煩雑さを避けるため $\mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_1$ を $\mathcal{D}\psi_1$ と書くとする。つまり共役の部分を省略する)。

$$\text{Tr}_V [\rho_V^n] = \frac{1}{Z_1^n} \int_{\Sigma_n} \mathcal{D}\psi_1 \cdots \mathcal{D}\psi_n \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \{ \mathcal{L}(\psi_1(x, t_E)) + \cdots + \mathcal{L}(\psi_n(x, t_E)) \} \right]. \quad (5.27)$$

ここで、レプリカシート上の場 $\psi_i, i = 1, 2, \dots, n$ の共有引数 $(x, t_E) \in \mathbb{R}^2$ を導入した(地味にこれめっちゃ重要)。また、レプリカシート上の場は以下の境界条件で結びついている。

$$\psi_i(x, +0) = \psi_{i+1}(x, -0), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5.28)$$

ただし、 $i = n$ の場合は $\psi_n(x, +0) = (-1)^{n+1} \psi_1(x, -0)$ 。この境界条件の寄与を以下の作用をする演算子として定義されるツイスト演算子 $\mathcal{T}_n, \tilde{\mathcal{T}}_n$ で記述することができる。

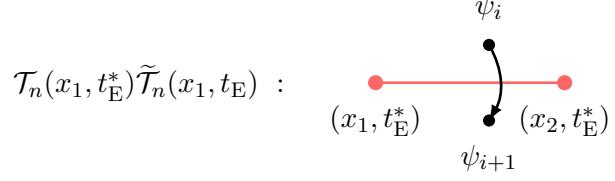
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(x^*, t_E^*) &: \psi_i(x, t_E^* + 0) \rightarrow \psi_{i+1}(x, t_E^* - 0), \\ \tilde{\mathcal{T}}_n(x^*, t_E^*) &: \psi_{i+1}(x, t_E^* + 0) \rightarrow \psi_i(x, t_E^* - 0). \end{aligned} \quad (5.29)$$

もう少しありやすく述べると、 $\mathcal{T}_n(x^*, t_E^*), \tilde{\mathcal{T}}_n(x^*, t_E^*)$ の作用は以下のようにブランチカットを入れることを意味する。

$$\mathcal{T}_n(x^*, t_E^*) : \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} \quad , \quad \tilde{\mathcal{T}}_n(x^*, t_E^*) : \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} \quad , \quad (5.30)$$

ψ_i ψ_{i+1}
 --- ---
 (x^*, t_E^*) (x^*, t_E^*)
 ψ_{i+1} ψ_i

これを用いると、例えばツイスト演算子の積 $\mathcal{T}_n(x_1, t_E) \tilde{\mathcal{T}}_n(x_1, t_E)$ はインターバル $[x_1, x_2]$ にブランチカットが入ることを意味する；



ここで、 $x > x_2$ のブランチカットは $\mathcal{T}_n(x_1, t_E)$ と $\tilde{\mathcal{T}}_n(x_1, t_E)$ の作用で相殺し無くなっている。このように作用するツイスト演算子 \mathcal{T}_n , $\tilde{\mathcal{T}}_n$ が与えられたとすると、(5.27) の分配関数 Z_n はツイスト演算子の相關関数として以下のように表せる²⁵。

ツイスト演算子による表式 [32, 33]：

$$\text{Tr}_V [\rho_V^n] = \left\langle \mathcal{T}_n(u_1) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_1) \cdots \mathcal{T}_n(u_N) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_N) \right\rangle_{\mathbb{R}^2}. \quad (5.32)$$

また、ツイスト演算子 \mathcal{T}_n , $\tilde{\mathcal{T}}_n$ は primary 演算子であることが分かっており、共形ウエイトは以下で与えられる [34]。

$$h_{\mathcal{T}_n} = \bar{h}_{\mathcal{T}_n} = \frac{c}{24} \left(n - \frac{1}{n} \right). \quad (5.33)$$

ここで、 c は中心電荷である。 $\tilde{\mathcal{T}}_n$ の共形ウエイトについても同様である。

また、少し余談をすると、今回ツイスト演算子を (5.29) のように作用する演算子として抽象的に定義した。概念的にはよく用いられるのだが、一般にツイスト演算子の具体形を求めるのは難しい。唯一、2次元 free massless fermion の場合はツイスト演算子の具体形が知られている [35]。

6 先行研究 1 : massless free fermion

前の章で述べたレプリカ法によって、場の量子論でいくつかのモデルで EE や ERE が計算可能になった。このセクションでは計算できるモデルの例として二次元で massless free fermion を

²⁵ 必ずしも正しくないが、経路積分の境界条件を以下のようにデルタ関数で書いて、デルタ関数に関する項がツイスト演算子を表しているイメージ。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z_1^n} \int_{\psi_1(x \in V, +0) = \psi_2(x \in V, -0)}^{\psi_1(x \in V, +0) = \psi_2(x \in V, -0)} \mathcal{D}\psi_1 \cdots \mathcal{D}\psi_n \exp \left[- \sum_{i=1}^n I[\psi_i, \bar{\psi}_i] \right] \\ & \quad \vdots \\ & = \frac{1}{Z_1^n} \int \mathcal{D}\psi_1 \cdots \mathcal{D}\psi_n [\delta(\psi_1(x \in V, +0) - \psi_2(x \in V, -0)) \delta(\psi_2(x \in V, +0) - \psi_3(x \in V, -0)) \cdots] \\ & \quad \exp \left[- \sum_{i=1}^n I[\psi_i, \bar{\psi}_i] \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

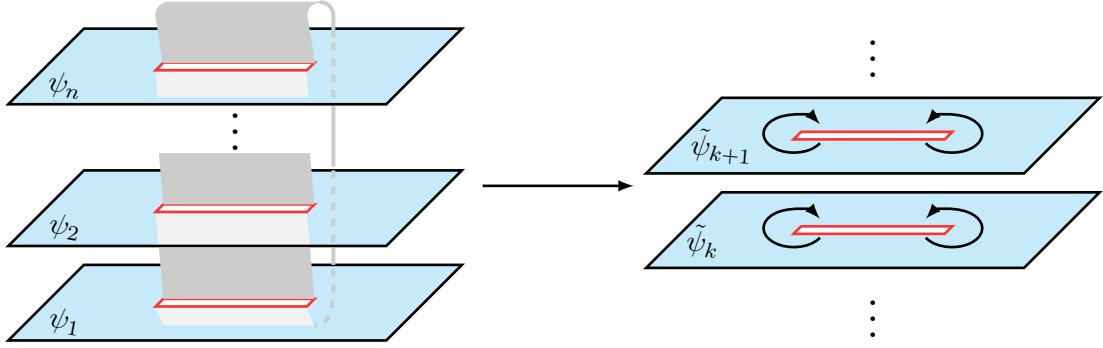


図 9. 左の図は元々のレプリカ多様体 $\Sigma_{n,N}$ を表す。適切に場を $\psi_i \rightarrow \tilde{\psi}_k$ と再定義することでレプリカシートを分離することができる(右図)。この時、レプリカシート間の境界条件がなくなる代わりに場 $\tilde{\psi}_k$ は多価関数になっている(右図の矢印の方向に一周すると場 $\tilde{\psi}_k$ に位相がつく)。

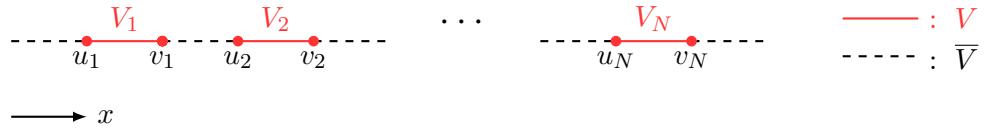


図 10. 1+1 次元時空において、領域 V が N 個のインターバルで構成されている様子。赤のラインは領域 $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N$ を表し、点線はその補集合 \bar{V} を表す。ここで i 番目のインターバルの両端の座標を u_j, v_j と置く($V_j = [u_j, v_j]$)。

扱おう。以下の 2 つのステップを踏むことで ERE や EE の厳密な結果を得ることができる。

- Step 1 : レプリカシートの分離
- Step 2 : ボソン/フェルミオン双対性を用いた解析

それでは一つずつ見ていく。

6.1 Step 1 : レプリカシートの分離

相互作用のないモデルの場合、図 9 に表されているようなレプリカシートの分離が行える。ここではこれがどういうことかについて説明する。簡単のため、2 次元 Euclid 時空を扱ってみよう。Euclidean 作用 $I[\psi, \bar{\psi}]$ は以下で与えられる。

$$I[\psi, \bar{\psi}] = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \bar{\psi} \partial^\mu \psi . \quad (6.1)$$

また、領域 V は図 10 のように N 個の interval $V_j = [u_j, v_j], j = 1, 2, \dots, N$ で構成されているとする；

$$V = [u_1, v_1] \cup [u_2, v_2] \cup \dots \cup [u_N, v_N] . \quad (6.2)$$

レプリカ法を用いると、ERE は二次元平面上の分配関数 Z_1 とレプリカ多様体 $\Sigma_{n,N}$ 上の分配

関数 $Z_{n,N}$ を用いて以下のように与えられる²⁶。

$$S_n(V) = \frac{1}{1-n} \log \left(\frac{Z_{n,N}}{Z_1^n} \right) = \frac{1}{Z_1^n} \int_{\Sigma_{n,N}} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-I[\Psi, \bar{\Psi}]} , \quad (6.3)$$

ここで、 $I[\Psi, \bar{\Psi}]$ は以下で与えられる作用である。

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \sum_{i=1}^n I[\psi_i, \bar{\psi}_i] = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}_i^2} d^2x \ \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i . \quad (6.4)$$

積分範囲の \mathbb{R}_i^2 は i 番目のレプリカシートを表す。また、 $\int_{\Sigma_{n,N}}$ は境界条件 (5.26) 付きの経路積分である。free のモデルとはいえ、レプリカシート間の境界条件は厄介であり、そのまま経路積分を実行するのは難しい。そこで以下のように T 行列 (5.26)(境界条件を表す行列) を対角化してみよう。

$$U^\dagger T U = \text{diag} \left\{ e^{i \frac{k}{n} 2\pi} \right\} , \quad k = -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2} + 1, \dots, \frac{n-1}{2} , \quad (6.5)$$

ここで、 U はある unitary 行列。また、新しい場 $\tilde{\psi}_k$, $k = -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2} + 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ を以下で定義する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{-\frac{n-1}{2}} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix} := U^\dagger \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} . \quad (6.6)$$

この新しい場 $\tilde{\psi}_k$ で見るとレプリカシート間の境界条件 (5.25) は以下のように書き換えられる。

$$\tilde{\psi}_k(x_+) = e^{i \frac{k}{n} 2\pi} \tilde{\psi}_k(x_-) . \quad (6.7)$$

ここで、 $x_\pm := (x \in V, t_E = \pm 0)$ とおいた。この時、新しい場 $\tilde{\psi}_k$ の境界条件は k 番目のシート上で完結していることに注意。この状態だとシート間の connection が無く、取り扱いがしやすい(図 9)。新しい場 $\tilde{\psi}_k$ は領域 V を cut とする多価関数となっているが、この多価性は Background ゲージ場に押し付けることができる²⁷。

$$\tilde{\psi}_k(x) = \exp \left(i \int_{x_0}^x dx'^\mu A_{k,\mu}(x') \right) \tilde{\psi}'_k(x) , \quad (6.8)$$

$\tilde{\psi}_k(x)$: 多価関数, $\tilde{\psi}'_k(x)$: 一価関数, x_0 : 時空のある点

この式を、(6.4) に代入すると、作用は以下のように書き換えられる。

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \sum_k \int_{\mathbb{R}_k^2} d^2x \ \bar{\tilde{\psi}}'_k \gamma^\mu (\partial_\mu + iA_{k,\mu}) \tilde{\psi}'_k . \quad (6.9)$$

²⁶ここで、領域 V が N 個の interval で構成されていることを示すためレプリカ多様体 Σ_n に添字 N をつけ、 $\Sigma_{n,N}$ を書いた。

²⁷これはまさに量子力学で出てくる Aharonov-Bohm 効果と同じである。

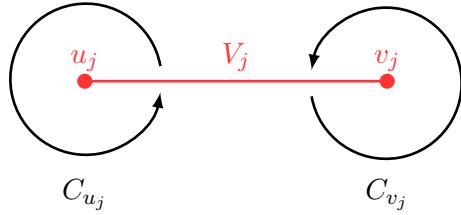


図 11. 上の矢印は cycle C_{u_j} , C_{v_j} , $j = 1, 2, \dots, N$ を表す。場 $\tilde{\psi}_k$ はこの図のように領域 V_i に cut を持つ多価関数であり、cycle C_{u_j} , C_{v_j} の方向に境界条件をもつ。

補足：

ちなみに、このようにレプリカシートの分離し、分配関数を (6.15) のように書けるのは free の場合のみである。もう少し正確にいようと、Lagrangian が場の 2 次の項 ($\bar{\psi}(\#)\psi$ のような項) のみを含む場合に上手くいく。というのも、場の 2 次の項の場合、(6.6) の変換で形が変わらない；

$$\sum_i \bar{\psi}_i(\#)\psi_i = \bar{\Psi}(\#)\Psi = \bar{\Psi}U(\#)U^\dagger\tilde{\Psi} = \bar{\Psi}(\#)\tilde{\Psi}.$$

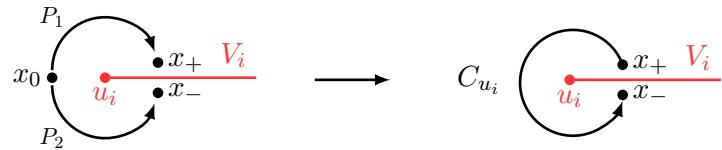
このように変換行列 U は U^\dagger と打ち消し合って消えてくれる。一方、 $(\bar{\psi}\psi)^2$ や $(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$ のような項はこのように上手くはいかず、シート間の場がぐちゃぐちゃに絡み合う複雑な項になる (U が残る)。こうなると解析が一気に煩雑になってしまふ。ちなみに、このやり方で計算している文献はある [36, 37]。ただし摂動論の範囲だ。

次に、具体的に background ゲージ場の形を求めておこう。図 11 のような cycle C_{u_i} , C_{v_i} を考えると、(6.8) より以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_k(x_-) &= \exp\left(i \oint_{C_{u_i}} dx'^\mu A_{k,\mu}(x')\right) \tilde{\psi}_k(x_+), \\ \tilde{\psi}_k(x_+) &= \exp\left(i \oint_{C_{v_i}} dx'^\mu A_{k,\mu}(x')\right) \tilde{\psi}_k(x_-). \end{aligned} \quad (6.10)$$

$\tilde{\psi}'_k(x)$ の一価性：

一応確認だが、この式を得るには $\tilde{\psi}'_k(x)$ の一価性が重要である。これは周回積分をする際に仮想的に x_0 を考えるとわかりやすい。



左図のような経路を考えると、(6.8) より、

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_k(x_+) &= \exp\left(i \int_{P_1} dx'^\mu A_{k,\mu}(x')\right) \tilde{\psi}'_k(x_-), \\ \tilde{\psi}_k(x_-) &= \exp\left(i \int_{P_2} dx'^\mu A_{k,\mu}(x')\right) \tilde{\psi}'_k(x_+),\end{aligned}\tag{6.11}$$

ここで、 $\tilde{\psi}'_k(x)$ は一価関数であるため、 $\tilde{\psi}'_k(x_+) = \tilde{\psi}'_k(x_-)$ としてよく、これらの式を割ることにより、(6.8) を得る ($C_{u_i} = P_2 - P_1$)。 C_{v_i} についても同様の議論が成り立つ。何気に (6.8) を書いたがこういう地味に大事な事情に注意しよう。

(6.10) が (5.25) と match する条件は

$$\begin{aligned}\oint_{C_{u_i}} dx'^\mu A_{k,\mu}(x') &= -\frac{k}{n} 2\pi, \\ \oint_{C_{v_i}} dx'^\mu A_{k,\mu}(x') &= \frac{k}{n} 2\pi,\end{aligned}\tag{6.12}$$

であり、これを stokes の定理を用いて解くと、以下の解を得る。

$$\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu A_{k,\mu}(x) = -2\pi \frac{k}{n} \sum_{j=1}^N \left[\delta^{(2)}(x - u_j) - \delta^{(2)}(x - v_j) \right].\tag{6.13}$$

ここで、 $\epsilon^{xt_E} = 1$ とした。この background ゲージ場を用いると、 k 番目のレプリカシート上の分配関数 Z_k は以下のように書ける。

$$Z_k = \left\langle \exp\left(-i \int d^2x A_{k,\mu} j_k^\mu\right) \right\rangle_{\mathbb{R}_k^2}, \quad j_k^\mu := \bar{\psi}_k \gamma^\mu \tilde{\psi}_k.\tag{6.14}$$

また、レプリカシートは分離されているため、レプリカ多様体上の分配関数 $Z_{n,N}$ は以下のように独立な分配関数 Z_k の積で表せる；

$$Z_{n,N} = \prod_{k=-(n-1)/2}^{k=(n-1)/2} Z_k.\tag{6.15}$$

6.2 Step 2 : ボソン/フェルミオン双対性を用いた解析

Step1 の議論より、「free fermion の ERE を求める」という問題は「二次元平面上の background ゲージ場が (6.13) のときの相関関数 (6.14) を計算する」という問題に帰着させることができた。このパラグラフではボソン/フェルミオン双対性を用いてこの Z_k を計算しよう。ボソン/フェルミオン双対性の辞書 (2.58) より、 $j_k^\mu \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_k$ の対応関係があるので、 Z_k は以下のように

変形できる。

$$\begin{aligned}
Z_k &= \left\langle \exp \left(-\frac{i}{2\pi} \int d^2x A_{k,\mu} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_k \right) \right\rangle , \\
&= \left\langle \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int d^2x \underbrace{(\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu A_{k,\mu})}_{(6.13)} \phi_k \right) \right\rangle , \\
&= \left\langle \exp \left(-i \frac{k}{n} \sum_{j=1}^N [\phi_k(u_j) - \phi_k(v_j)] \right) \right\rangle , \\
&= \left\langle \prod_{j=1}^N \exp \left(-i \frac{k}{n} \phi_k(u_j) \right) \exp \left(i \frac{k}{n} \phi_k(v_j) \right) \right\rangle . \tag{6.16}
\end{aligned}$$

ここで 1 行目から 2 行目に行く時には部分積分を行い、2 行目から 3 行目には background gauge 場の具体的な configuration (6.13) を用いた。最後の式を見ると、vertex operator の相関関数のような形をしており、以下の公式が使えそうだ。

Vertex operator の相関関数：

$$\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) \cdots \mathcal{V}_{\alpha_n}(x_n) \rangle = \delta_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n, 0} \prod_{i < j}^n |x_j - x_i|^{2\alpha_i \alpha_j} . \tag{6.17}$$

ここで、 \mathcal{V}_α は vertex operator は以下で与えられる。

$$\mathcal{V}_\alpha(x) := : \exp(i\alpha\phi(x)) : = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} : \phi(x)^n : . \tag{6.18}$$

Proof. この公式を示すためには $\phi(x, t)$ の mode 展開で zero mode を別にして扱う必要がある。以前導出した mode 展開 (2.33) で zero mode の寄与を explicite に書くと、

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \hat{\phi}_0 + 4\pi\hat{\pi}_0 t + Ax + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\omega_p}} (\hat{a}_p e^{i(px - \omega_p t)} + \hat{a}_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)}) \\ \pi(x, t) = \hat{\pi}_0 - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sqrt{\frac{\omega_p}{2\pi}} (\hat{a}_p e^{i(px - \omega_p t)} - \hat{a}_p^\dagger e^{-i(px - \omega_p t)}) \end{cases} . \tag{6.19}$$

ここで A は定数である。(6.17) を示すには以下の式が重要な役割を果たす。

$$\left\langle e^{i\alpha\hat{\phi}_0} \right\rangle = \delta_{\alpha, 0} . \tag{6.20}$$

これは以下のように示せる。正準量子化を行うと交換関係は以下の通り。

$$\left\{ \begin{array}{l} [\phi(x, t), \pi(y, t)] = i\delta(x - y) , \\ \text{(それ以外)} = 0 , \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} [\hat{\phi}_0, \hat{\pi}_0] = i, \\ [\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] = 2\pi\delta(p - q), \\ \text{(それ以外)} = 0 \end{array} \right. \quad (6.21)$$

これより、 $\hat{\pi}_0$ と $e^{i\alpha\hat{\phi}_0}$ の交換関係は

$$[\hat{\pi}_0, e^{i\alpha\hat{\phi}_0}] = \sum_n \frac{(i\alpha)^n}{n!} [\hat{\pi}_0, \hat{\phi}_0^n] = \alpha e^{i\alpha\hat{\phi}_0} . \quad (6.22)$$

ここで、 $[\hat{\pi}_0, \hat{\phi}_0^n] = -in\hat{\phi}_0^{n-1}$ を用いた。これより、状態 $|\alpha\rangle := e^{i\alpha\hat{\phi}_0} |0\rangle$ は $\hat{\pi}_0$ の固有値 α の固有状態であることがわかる。

$$\hat{\pi}_0 |\alpha\rangle = ([\hat{\pi}_0, e^{i\alpha\hat{\phi}_0}] + e^{i\alpha\hat{\phi}_0} \hat{\pi}_0) |0\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (6.23)$$

ただし、真空状態 $|0\rangle$ は並進不变と言う仮定を用いた ($\hat{\pi}_0 |0\rangle = 0$)。 $\hat{\pi}_0$ は hermite であるので、固有状態 $|\alpha\rangle$ は直交する。

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} . \quad (6.24)$$

導出を忘れた人は線形代数でよく使う式変形を思い出そう。

$$0 = \langle \alpha | \hat{\pi}_0 | \beta \rangle - \langle \alpha | \hat{\pi}_0 | \beta \rangle = \langle \alpha | \underbrace{\hat{\pi}_0}_{=\beta | \beta \rangle} | \beta \rangle - \underbrace{\langle \alpha | \hat{\pi}_0}_{=\alpha \langle \alpha |} | \beta \rangle = (\alpha - \beta) \langle \alpha | \beta \rangle ,$$

$$\text{if } \alpha \neq \beta \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle = 0 .$$

これより、(6.20) が示せる。

$$\langle e^{i\alpha\hat{\phi}_0} \rangle = \langle 0 | \alpha \rangle = \delta_{\alpha, 0} = (6.20) \quad (6.25)$$

さて、下準備が整ったので (6.17) の証明に入ろう。

まずは $n = 2$ を考えてみよう。compact boson の解析の際に用いた公式 $:e^A: :e^B: = :e^{A+B}: e^{\langle AB \rangle}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \rangle &= \left\langle :e^{i\alpha_1\phi(x_1) + i\alpha_2\phi(x_2)}:\right\rangle e^{-\alpha_1\alpha_2\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle} \\ &= \left\langle e^{i(\alpha_1+\alpha_2)\hat{\phi}_0}\right\rangle |x_1 - x_2|^{2\alpha_1\alpha_2} . \end{aligned} \quad (6.26)$$

となる。ここで normal ordering は生成演算子を左に持っていくため、生成演算子を含む項の VEV がゼロになることと、mode 展開 (2.33) から示せる式 $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = -2 \log |x - y|$ を用いた。最後に、(6.20) を用いると、

$$\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \rangle = \delta_{\alpha_1+\alpha_2, 0} |x_1 - x_2|^{2\alpha_1\alpha_2} , \quad (6.27)$$

となり、(6.17) の $n = 2$ の場合が示した。

次に、 $n = 3$ の場合を考えてみよう。同じテクニックを用いて以下の VEV を評価すると、

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) : \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{V}_{\alpha_3}(x_3) : \rangle &= \langle : \exp(i\alpha_1\phi(x_1) + i\alpha_2\phi(x_2) + i\alpha_3\phi(x_3)) : \rangle \\
&\quad \times \exp[-\langle \alpha_1\phi(x_1)(\alpha_2\phi(x_2) + \alpha_3\phi(x_3)) \rangle] \\
&=: \exp[i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\hat{\phi}_0] : \\
&\quad \times \exp[-\alpha_1\alpha_2\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle] \times \exp[-\alpha_1\alpha_3\langle \phi(x_1)\phi(x_3) \rangle] \\
&= \delta_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,0} \cdot |x_1 - x_2|^{2\alpha_1\alpha_2} \cdot |x_1 - x_3|^{2\alpha_1\alpha_3} \\
&= ((6.17) \text{ の右辺}) .
\end{aligned}$$

一方、 $: \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) : = \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) - \langle \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) \rangle$ を用いると、

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) : \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{V}_{\alpha_3}(x_3) : \rangle &= \langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) [\mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{V}_{\alpha_3}(x_3) - \langle \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{V}_{\alpha_3}(x_3) \rangle] : \rangle \\
&= \langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{V}_{\alpha_3}(x_3) : \rangle - \underbrace{\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) : \rangle}_{=0} \cdot \langle \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{V}_{\alpha_3}(x_3) : \rangle \\
&= \langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) \mathcal{V}_{\alpha_2}(x_2) \mathcal{V}_{\alpha_3}(x_3) : \rangle \\
&= ((6.17) \text{ の左辺}) .
\end{aligned} \tag{6.28}$$

よって、(6.17) の $n = 3$ の場合を示すことができた。同様の計算を繰り返すことで一般の n で (6.17) が成り立つことがわかる。 \square

この公式 (6.17) を (6.16) に用いると、

$$\log Z_k = -2 \frac{k^2}{n^2} \left(\sum_{i,j}^N \log |u_i - v_j| - \sum_{i < j}^N \log |u_i - u_j| - \sum_{i < j}^N \log |v_i - v_j| - N \log \epsilon \right) . \tag{6.29}$$

となる。 k についての sum を実行すると、

$$\begin{aligned}
\log Z_{n,N} &= \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \log Z_k \\
&= \frac{1-n^2}{6n} \left(\sum_{i,j}^N \log |u_i - v_j| - \sum_{i < j}^N \log |u_i - u_j| - \sum_{i < j}^N \log |v_i - v_j| - N \log \epsilon \right) .
\end{aligned}$$

ここで、 $\sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} k^2 = \frac{1}{12}n(n^2 - 1)$ を用いた。最後に得られた $Z_{n,N}$ を ERE の公式 (5.22) に代入すると最終的に以下の結果を得る ($Z_1 = \langle 0|0 \rangle = 1$)。

Free massless fermion の ERE[14] :

$$S_n = \frac{n+1}{6n} \left(\sum_{i,j} \log |u_i - v_j| - \sum_{i < j} \log |u_i - u_j| - \sum_{i < j} \log |v_i - v_j| - N \log \epsilon \right) . \quad (6.30)$$

ここで ϵ は UV cutoff length である。この結果は任意のインターバル数 n 、レプリカシート数 N で ERE が解析的に計算できる貴重な例である。との研究のセクションではこの free fermion の結果を consistency check 等に用いる。

(6.30) の導出の補足 :

鋭い人は気づいたかもしれないが、(6.16) に出てくる項は vertex operator と関数形が似ているが、normal ordering がない。教科書でも normal ordering の記号は省略されることがよくあるのでうっかりするとミスをしてしまう。結論から言うとナイーブに (6.17) を代入して計算すると UV finite な項が出てきて、normal ordering がないことを考慮に入れると UV cutoff 依存性が出る。原論文でもこの議論は適当に誤魔化してやっているので、ここでもちゃんと議論しておこう。

まずは $e^{i\alpha\phi(x)}$ を以下のように級数展開の形に書いてみよう。

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha\phi(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \phi(x)^n \\ &= \sum_m \left(\frac{1}{(2m+1)!} (i\alpha)^{2m+1} \phi^{2m+1}(x) + \frac{1}{(2m)!} (i\alpha)^{2m} \phi^{2m}(x) \right) , \end{aligned} \quad (6.31)$$

次に、normal ordering との関係を評価しよう。奇数幕の方は、

$$\phi^{2m+1}(x) = : \phi^{2m+1}(x) : + \underbrace{\langle \phi^{2m+1}(x) \rangle}_{=0} = : \phi^{2m+1}(x) : . \quad (6.32)$$

ここで、このモデルでは奇数幕の一点関数はゼロであることを用いた (free compact boson の作用は $\phi \rightarrow -\phi$ の対称性があるので、偶数幕しかノンゼロにならない、と考えても良い)。偶数幕の方は

$$\begin{aligned} \phi^{2m}(x) &= : \phi^{2m}(x) : + \langle \phi^{2m}(x) \rangle \\ &= : \phi^{2m}(x) : + (2m-1)!! \left(\log \frac{1}{\epsilon^2} \right)^m , \end{aligned} \quad (6.33)$$

となる (ϵ :UV cutoff length)。ここで、 $\langle \phi^{2m}(x) \rangle$ は wick の定理で以下のように評価した。

$$\begin{aligned} \langle \phi^{2m}(x) \rangle &= \underbrace{\langle \phi(x) \phi(x) \cdots \phi(x) \rangle}_{m \text{ 対の縮約}} + \cdots \\ &= \langle \phi(x) \phi(x) \rangle^m \cdot \underbrace{(2m-1)!!}_{\text{縮約の組み合わせ数}} , \end{aligned}$$

既に計算した propagator(2.39) を用いると、 $\langle \phi(x)\phi(x) \rangle = \log \frac{1}{\epsilon^2}$ より $(x - x \sim \epsilon)$ 、(6.33) が示せる。こうして得られた結果 (6.32), (6.33) を $e^{i\alpha\phi}$ の級数展開 (6.31) に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha\phi(x)} &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} : \phi(x)^n :}_{=\mathcal{V}_\alpha(x)} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!} (i\alpha)^{2m} \left(\log \frac{1}{\epsilon^2}\right)^m}_{=\frac{1}{2^m m!}} \\
&= \mathcal{V}_\alpha(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{\alpha^2}{2} \log \frac{1}{\epsilon^2}\right)^m \\
&= \mathcal{V}_\alpha(x) + \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} \log \frac{1}{\epsilon^2}\right] \\
&= \mathcal{V}_\alpha(x) + \epsilon^{\alpha^2} \\
&= \mathcal{V}_\alpha(x) \left(1 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha^2})\right) \\
&\simeq \mathcal{V}_\alpha(x) \mathcal{O}(\exp[\epsilon^{\alpha^2}]) . \tag{6.34}
\end{aligned}$$

よって、normal ordering のないことによる寄与が計算できたので、この結果を (6.16) に代入し、 Z_k を計算すると、

$$\log Z_k = \log \left\langle \prod_{j=1}^N \mathcal{V}_{-\frac{k}{n}}(u_j) \mathcal{V}_{\frac{k}{n}}(v_j) \right\rangle + 2N \frac{k^2}{n^2} \mathcal{O}(\log \epsilon) .$$

これに vertex operator の相関関数の公式 (6.17) を用いて計算すると、

$$\log Z_k = -2 \frac{k^2}{n^2} \left(\sum_{i,j}^N \log |u_i - v_j| - \sum_{i < j}^N \log |u_i - u_j| - \sum_{i < j}^N \log |v_i - v_j| - N \mathcal{O}(\log \epsilon) \right) . \tag{6.35}$$

となる。この議論で UV cutoff 依存性は $\mathcal{O}(\log \epsilon)$ であることがわかった。この具体的な関数形は (6.35) の式を見て決める。周りの関数形が $\log(\text{長さ})$ になっていることからこれに合わせて $\mathcal{O}(\log \epsilon)$ の部分が $\log \epsilon$ だと予想できる。これにより、(6.29) が導出できた。それ以降の計算は同じである。

と、まあ、ガチで UV cutoff 依存性を導出しようとするところなにもテクニカルになってしまふ。ここまでくると論文でみんな適当に誤魔化して書くのも納得。

7 先行研究 2：領域 V が単連結な場合の CFT₂

2 次元 CFT で領域 V が単連結な場合を考える (図 12)。この場合、共形対称性から ERE の厳密な結果が得られることが知られている [12]。結果から述べると以下のようになる。

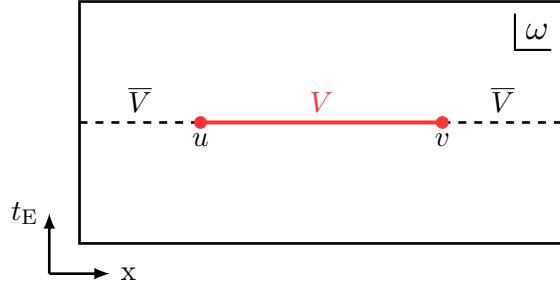


図 12. 2 次元 Euclid 時空で領域 V が単連結な場合の図。赤いラインが領域 V を表し、点線が領域 \bar{V} を表す。ここで、領域 V の端点の x 座標を u, v と置いた。また、このセクションではこの 2 次元 Euclid 平面上の複素座標を ω と書くとする。

2 次元 CFT で領域 V が単連結な場合の ERE:

$$S_n^c([u, v]) = \frac{c}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(\frac{v - u}{\epsilon}\right). \quad (7.1)$$

ここで、 c は考へている CFT の中心電荷。

このセクションでは共形対称性からどのようにしてこの結果を導けるかを解説しよう。今回は以下の 2 つの方法を扱う。

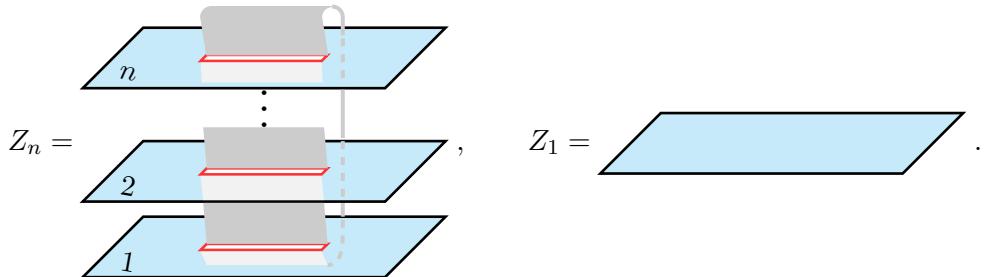
- レプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ をシリンダーにマップする方法 [31]
- ツイスト演算子の共形を用いる方法 [33]

それでは行こう。

7.1 レプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ をシリンダーにマップする方法

今回の場合にレプリカ法を用いると、ERE はレプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ 上の分配関数を用いて以下のように書ける。

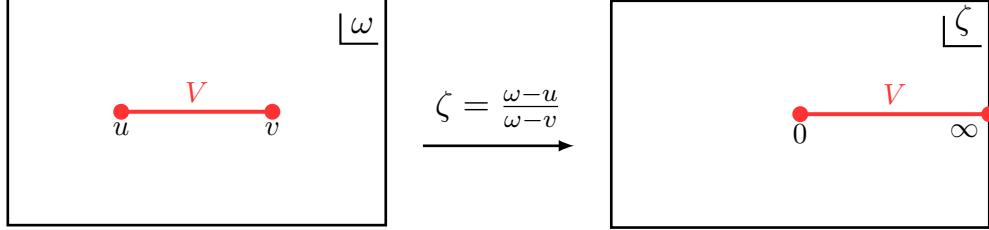
$$S_n(V) = \frac{1}{1-n} \log\left(\frac{Z_n}{Z_1^n}\right), \quad (7.2)$$



適切に共形変換を施すことによって、このレプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ はシリンダーにマップすることができる。そのためにまずは以下の共形変換 $\omega \mapsto \zeta$ を行う。

$$\zeta = \frac{\omega - u}{\omega - v} . \quad (7.3)$$

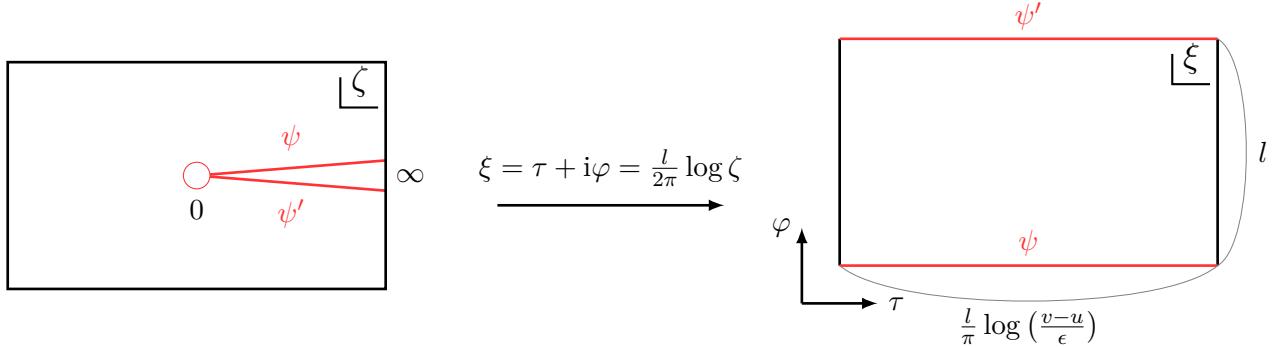
この共形変換を行うと、領域 V の座標 u, v は $0, \infty$ にマップされる（以下の図を参照）。



さらに次の共形変換をすることで、二次元平面は以下のようにシリンダー変形される。

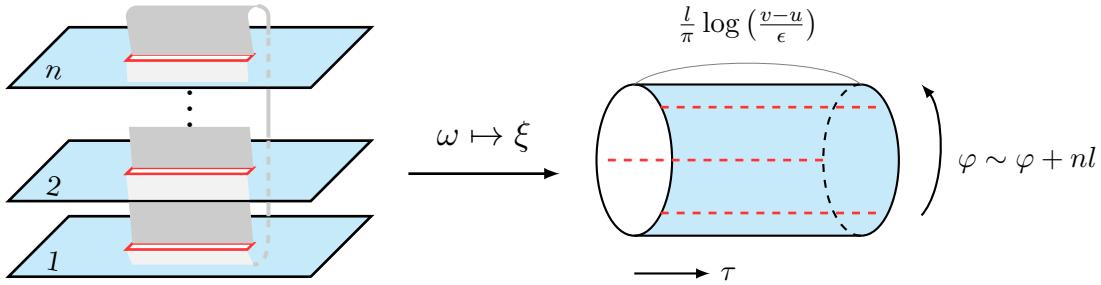
$$\xi = \tau + i\varphi = \frac{l}{2\pi} \log \zeta . \quad (7.4)$$

ここで、 l はシリンダーの周の長さである ($\varphi \sim \varphi + l$)。ここで、レプリカ法の考え方則って、二次元平面上で領域 V に切り込みを入れてみよう。そうすると $\varphi = 0$ と $\varphi = 2\pi$ を同一視できないことに注意しよう（下の図を参照）。



ここで、上の図のように ζ 平面において特異点である原点を半径 $\epsilon/(v-u)$ の円とみなして正則化した（ ϵ :UV cutoff スケール）[38]。こうすると、 ξ の実部 τ の範囲は $\tau \in [-\frac{l}{2\pi} \log(\frac{v-u}{\epsilon}), \frac{l}{2\pi} \log(\frac{v-u}{\epsilon})]$ となる。元々の 2 次元空間で領域 V にカットが入っていなかった場合、 ξ 座標で見た時に赤いラインで表される部分は同一視されるのでシリンダーになる。しかし、今回は領域 V にカットが入っているので、一般にシリンダーにはならないことに注意。

さて、この共形変換を用いるとレプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ は以下のようになることが理解できる。



ここで、 n 枚のシートが貼り合わされて一つのシリンダーができるので、シリンダーの周の長さは nl になることに注意しよう。

レプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ がシリンダーにマップできることが分かったので、後はこのシリンダー上の分配関数を求めれば良い。シリンダーで τ 方向に注目すると、分配関数は以下のように書ける。

$$Z_n = \langle 0 | e^{-\beta H} | 0 \rangle . \quad (7.5)$$

ここで、 H は τ 方向の生成子(ハミルトニアン)、 β は τ 方向の長さ $\beta = \frac{l}{\pi} \log(\frac{v-u}{\epsilon})$ である。 H は 2 次元平面 \mathbb{C} 上の virasoro 生成子 L_0, \bar{L}_0 と中心電荷 c を用いて以下のように書ける²⁸。

$$H = \frac{2\pi}{nl} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) . \quad (7.6)$$

真空状態 $|0\rangle$ は dilatation と回転で不变であること ($L_0|0\rangle = \bar{L}_0|0\rangle = 0$) を用いると、(7.5) から Z_n は以下のように評価できる。

$$\log Z_n = \frac{c}{6n} \log \left(\frac{v-u}{\epsilon} \right) . \quad (7.7)$$

よって、これを (7.2) に代入すると、

$$S_n(V) = \frac{c}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log \left(\frac{v-u}{\epsilon} \right) , \quad (7.8)$$

を得る。このようにして (7.1) が導出できた。

7.2 ツイスト演算子の共形ウエイトを用いる方法

ツイスト演算子の共形ウエイトを既知とすると ERE はすぐに求めることができる。ツイスト演算子を用いた表式 (5.32) を用いて、共形ウエイト (5.33) を用いると、

$$\begin{aligned} \text{Tr}_V [\rho_V^n] &= \left\langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \right\rangle_{\mathbb{R}^2} \propto \left(\frac{v-u}{\epsilon} \right)^{-2(h_{\mathcal{T}_n} + \bar{h}_{\mathcal{T}_n})} \\ &= \left(\frac{v-u}{\epsilon} \right)^{-\frac{c}{6}(n-1/n)} . \end{aligned} \quad (7.9)$$

²⁸ これはエネルギー運動量テンソルの変換性から示すことができる。詳しくは 3.1.3 の説明を参照せよ。

となる²⁹。ここで、 $v \rightarrow u$ の場合を考え UV cutoff ϵ を導入した。これを用いると、

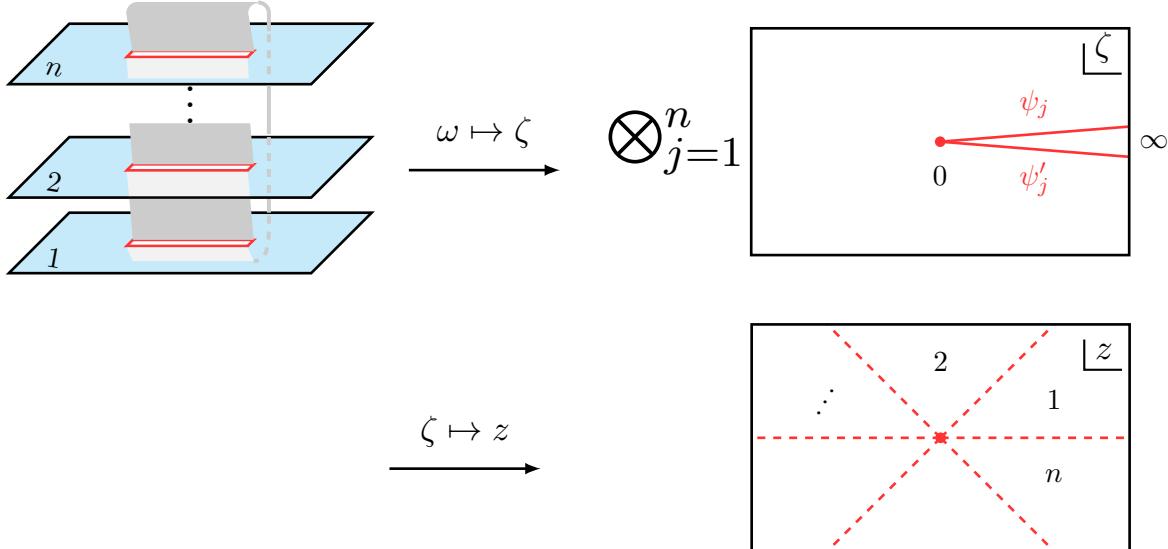
$$S_n(V) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}_V [\rho_V^n] = \frac{c}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log \left(\frac{v-u}{\epsilon}\right), \quad (7.10)$$

とあっさり (7.1) が導けてしまう。

とはいえ、「ツイスト演算子の共形ウェイトが分かってりやそりやそうだろ」と思う人もいるだろう。領域 V が単連結な場合はツイスト演算子の共形ウェイトの導出はそこまで煩雑ではないので、ここで紹介しておこう。今回はレプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ を一つの 2 次元平面にマップするやり方を考える。前のセクションで行った共形変換 $\omega \mapsto \zeta$ までは同じであるが、今度は以下の $\zeta \mapsto z$ の共形変換を考えてみよう。

$$\zeta \mapsto z = \zeta^{1/n}. \quad (7.11)$$

複素関数 $\zeta^{1/n}$ の性質から ζ 平面全体は z 平面のうち $1/n$ に対応する³⁰。これを用いるとレプリカ多様体 $\Sigma_{n,1}$ は以下のようにうまく張り合わされ、 z 平面全体にマップできることがわかる。



この共形変換を用いて、 j 番目のレプリカシート状のエネルギー運動量テンソル $T_j(\omega)$ の期待値 $\langle T_j(\omega) \rangle_{\Sigma_{n,1}}$ を計算してみよう。 z 平面は 2 次元平面であり、dilatation と回転で不変であるため、 $\langle T(z) \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ となることに注意すると、

$$\begin{aligned} \langle T_j(\omega) \rangle_{\Sigma_{n,1}} &= \left(\frac{dz}{d\omega} \right)^2 \langle T(z) - \frac{c}{12} \{\omega; z\} \rangle_{\mathbb{C}} = - \left(\frac{dz}{d\omega} \right)^2 \frac{c}{12} \{\omega; z\} \\ &= \frac{c(1 - 1/n^2)}{24} \frac{(v-u)^2}{(\omega-u)^2(\omega-v)^2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

²⁹ここで、物理的に意味のない定数は無視した

³⁰ $z = r_z e^{i\theta_z}$, $\zeta = r_\zeta e^{i\theta_\zeta}$ とおく。複素関数 $\zeta^{1/n}$ のブランチカットを実軸の正の方向に取ると、 $z = r_z e^{i\theta_z} = r_\zeta^{1/n} e^{i\theta_\zeta/n}$ となる。よって、 $0 \leq \theta_\zeta \leq 2\pi$ は $0 \leq \theta_z \leq 2\pi/n$ に対応し、 z 平面の $1/n$ 倍を占めることがわかる。

ここでエネルギー運動量テンソルの変換性 (3.10) を用いた。一方、 $\langle T_j(\omega) \rangle_{\Sigma_{n,1}}$ をツイスト演算子の言葉で書くと以下のように書ける。

$$\langle T_j(\omega) \rangle_{\Sigma_{n,1}} = \frac{\langle T_j(\omega) \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}} . \quad (7.13)$$

よって、先ほどの計算結果と合わせると、レプリカ多様体上のエネルギー運動量テンソル $T^{(n)}(\omega) = \sum_{j=1}^n T_j(\omega)$ の相関関数は以下のように書ける。

$$\frac{\langle T^{(n)}(\omega) \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}} = \frac{c(n^2 - 1)}{24n} \frac{(v - u)^2}{(\omega - u)^2 (\omega - v)^2} \quad (7.14)$$

となる。一方、3点関数に関する共形 Ward 恒等式より、以下の式も成り立つ。

$$\langle T^{(n)}(\omega) \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} = \left(\frac{1}{\omega - u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{h_{\mathcal{T}_n}}{(\omega - u)^2} + \frac{1}{\omega - v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{h_{\tilde{\mathcal{T}}_n}}{(\omega - v)^2} \right) \langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} . \quad (7.15)$$

この式に $\langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} = (v - u)^{-(h_{\mathcal{T}_n} + h_{\tilde{\mathcal{T}}_n})}$ を代入し、 $\frac{\langle T^{(n)}(\omega) \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}}$ を計算すると、

$$\frac{\langle T^{(n)}(\omega) \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}} = \frac{(v - u) (h_{\mathcal{T}_n}(v - \omega) + h_{\tilde{\mathcal{T}}_n}(\omega - u))}{(\omega - u)^2 (\omega - v)^2} . \quad (7.16)$$

となる。共形 Ward 恒等式で得られた結果 (7.16) と先ほど得た式 (7.14) を比較することで、共形ウェイト (5.33) を得る。

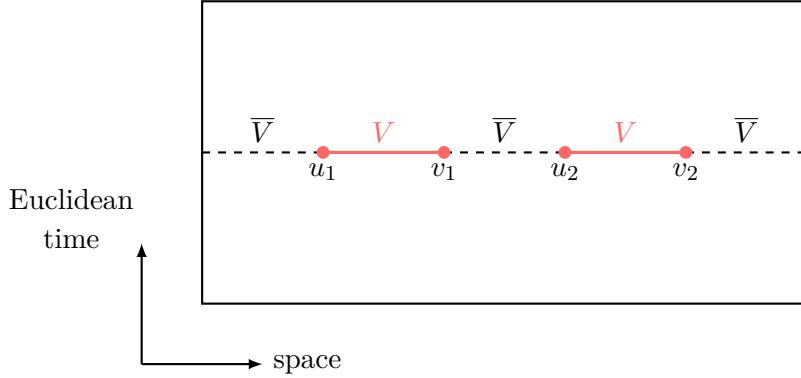


図 13. 2 次元時空で領域 V が 2 つの連結な領域で構成される場合の図。領域 $V = [u_1, v_1] \cup [u_2, v_2]$ は赤色で示されており、単連結な 2 つの領域の端点を u_1, v_1, u_2, v_2 とした。

Part III

相互作用を含む場の量子論のエンタングルメント (研究)

このパートではいよいよ研究の話に入る。パート II ではレプリカ法と先行研究をいくつかレビューしたが、先行研究では基本的に自由場の理論しか扱えていない。これはレプリカ多様体上の分配関数を求めることは技術的に困難であることに起因するが、パート I でレビューしたボソン/フェルミオン双対性はこの問題に対して有効なアプローチである。我々の研究ではこのアイデアを用い、実際に相互作用のある場の量子論モデルでエンタングルメントを計算できる例を示した。まずセクション 8 では具体的な問題設定を述べる。その後エンタングルメントを解析する上で非常に重要な共形変換をセクション 9 で解説し、セクション 10 では我々が得た結果について議論する。最後にセクション 11 で本研究のまとめを述べる。

8 モデルのセッティング

我々は相互作用のある場の量子論のモデルとして massless Thirring model [26] を扱う。Euclidean 作用は以下で与えられる。

$$I[\psi, \bar{\psi}, \lambda] = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[i \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{\pi}{2} \lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right], \quad (8.1)$$

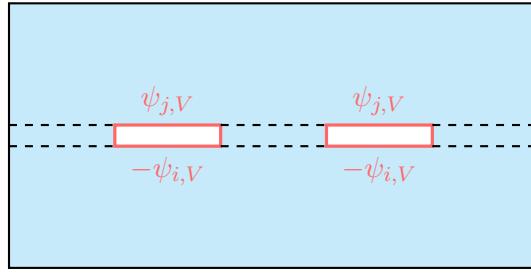
ここで、 ψ は Dirac fermion、 λ は Thirring coupling である。このモデルは $c = 1$ の CFT であることが知られている。領域 V が单連結の場合は CFT のエンタングルメントの公式 (7.1) がすでに知られているので、我々は次に複雑なセッティングとして図 13 のように領域 V が 2 つの单連結な領域で構成される場合を扱ってみよう。我々はこの領域 V に関する $n = 2$ の場合の

ERE を求めることを目標する。

$$\text{目標: } S_2(V) = -\log \text{Tr}_V [\rho_V^2] ,$$

領域 V は図 13 で与えられる。

この系に対してセクション II でレビューしたレプリカ法を適用してみよう。縮約密度行列 ρ_V は以下のように経路積分表示できる。



$$\langle \psi_{i,V} | \rho_V | \psi_{j,V} \rangle = \quad (8.2)$$

目標は $n = 2$ の ERE $S_2(V)$ なので、2枚のレプリカシートを用意し適切に gluing すると Thirring model の ERE $S_2(V)$ は以下のように書ける。

$$S_2(V, \lambda) = -\log \left[\frac{Z_{2,2}}{(Z_1)^2} \right] = -\log \langle \mathcal{T}_2(u_1) \tilde{\mathcal{T}}_2(v_1) \mathcal{T}_2(u_2) \tilde{\mathcal{T}}_2(v_2) \rangle . \quad (8.3)$$

ここで、 $Z_{2,2}$ はレプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ 上の massless Thirring model の分配関数である。

$$Z_{2,2}(V, \lambda) = \int_{\Sigma_{2,2}} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-I[\Psi, \bar{\Psi}, \lambda]} \\ = \begin{array}{c} \text{Diagram showing two parallel blue planes representing the boundary of } \Sigma_{2,2}. \text{ Between them are two vertical grey rectangles labeled } -\psi'_V \text{ and } \psi_V. \text{ Vertical dashed lines connect the top and bottom boundaries of these rectangles.} \\ , \end{array} \quad (8.4)$$

分配関数 $Z_{2,2}$ はそもそも計算することが困難であるため、これから共形変換を用いて扱いやすく変形していく。

9 共形変換

レプリカ法を用いると、「ERE を求める問題」は「レプリカ多様体上の分配関数 (8.4) を求める問題」に帰着できた。我々はこの分配関数をボソン/フェルミオン双対性を用いて求めたいところだが、レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ が複雑でありそのまま扱うことは難しい。そこで、ある共形変換をして分配関数 (8.4) がトーラスの分配関数に帰着させることを考えよう。この共形変換は少し複雑なので二つのステップ(ツイスト演算子の変換性の計算、トーラス分配関数を用いた計算)に分けて考えよう。

9.1 ツイスト演算子の変換性

今考えているレプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ 上の座標を z とする。以下の共形変換 $z \rightarrow \omega$ をすることで、領域 V の端点 (u_1, v_1, u_2, v_2) がそれぞれ $(0, x, 1, \infty)$ にマップすることができる。

$$w(z) = \frac{(v_2 - u_2)(z - u_1)}{(u_2 - u_1)(v_2 - z)}, \quad (9.1)$$

共形変換におけるプライマリ場の変換性 (3.9) と、ツイスト演算子の共形ウエイトの値 (5.33) を用いると、4点関数 $\langle \mathcal{T}_2(u_1)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_1)\mathcal{T}_2(u_2)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_2) \rangle$ は以下のように変換する。

$$\langle \mathcal{T}_2(u_1)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_1)\mathcal{T}_2(u_2)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_2) \rangle = \left(\frac{x}{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)} \right)^{\frac{1}{4}} \langle \mathcal{T}_2(0)\mathcal{T}_2(x)\tilde{\mathcal{T}}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle, \quad (9.2)$$

ここで、 x は領域 V_1, V_2 の cross ratio であり、以下で定義される。

$$x = \frac{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}. \quad (9.3)$$

また、(9.2) の導出では無限遠点におけるプライマリ場の定義 $\mathcal{O}(\infty) := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda^{2\Delta}} \mathcal{O}(\Lambda)$ を用いた (Δ はプライマリ場 \mathcal{O} の共形次元)。導出は以下のオレンジレフトバーに回す。

(9.2) の導出の詳細 :

Proof. 共形変換 (9.1) の形から、 $z = u_1, v_1, u_2, v_2$ が $\omega = 0, x, 1, \infty$ に対応する。また、共形変換におけるプライマリ場の変換性より、ツイスト演算子は以下のように変換する。

$$\mathcal{T}_2(z) = \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{z}} \right)^h \mathcal{T}_2(\omega), \quad (9.4)$$

ここで、ツイスト演算子の共形ウエイトの値を $h_{\tilde{\mathcal{T}}'_{2n}} = \bar{h}_{\tilde{\mathcal{T}}'_{2n}} = h$ と略記した。また微分 $\frac{d\omega}{dz}$ は計算すると以下の通り。

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{(v_b - u_a)(v_b - u_b)}{(u_b - u_a)(v_b - z)^2}, \quad (9.5)$$

ここで注意しなければいけないことは、微分 $\frac{d\omega}{dz}$ は $z = v_b$ で発散する。よって、 $z = v_b$ だけは特別に注意して扱おう。 $z = v_b$ に対応する点は $\omega = \infty$ であり、無限遠点でのツイスト演算子の定義より

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}'_{2n}(\infty) &\equiv \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\omega|^{2\Delta}} \tilde{\mathcal{T}}'_{2n}(|\omega|) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^{4h} \tilde{\mathcal{T}}'_{2n}(\Lambda), \end{aligned} \quad (9.6)$$

となる。また、 ω 平面上の無限大パラメーター Λ と z 平面上の無限小パラメーター ε は以下で関係している。

$$\Lambda = \frac{(v_b - u_b)(v_b - u_a)}{(u_b - u_a)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}, \quad \Lambda \gg 1, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (9.7)$$

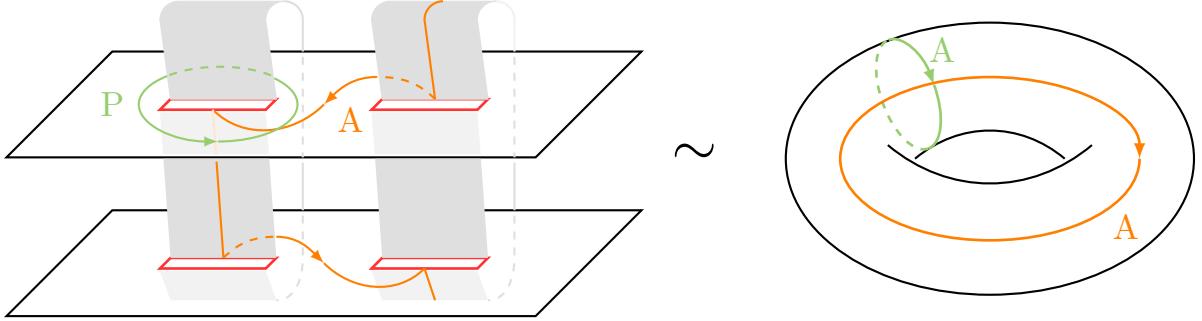


図 14. レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ は共形変換によってトーラスにマップできる。レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ 上に黄緑色、オレンジ色で示されているサイクルはトーラスの非自明な二つのサイクルに対応している。レプリカ多様体上の黄緑のサイクルに沿って場は周期的 (P) であるが、共形変換をするとトーラス上で反周期的 (A) に境界条件が変わる。

$z = v_b$ での微分は発散するので $z = v_b - \varepsilon$ で評価しよう。すると、4点関数の共形変換出てくるファクターは

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} \Big|_{u_a} \cdot \frac{d\omega}{dz} \Big|_{v_a} \cdot \frac{d\omega}{dz} \Big|_{u_b} \cdot \frac{d\omega}{dz} \Big|_{v_b - \varepsilon} &= \left(\frac{(u_a - v_b)x}{(v_a - u_a)(u_b - u_a)\varepsilon} \right)^2 \\ &= \left(\frac{x}{(v_a - u_a)(v_b - u_b)} \right)^2 \lambda^2, \end{aligned} \quad (9.8)$$

と計算される。これより、4点関数の変換性は

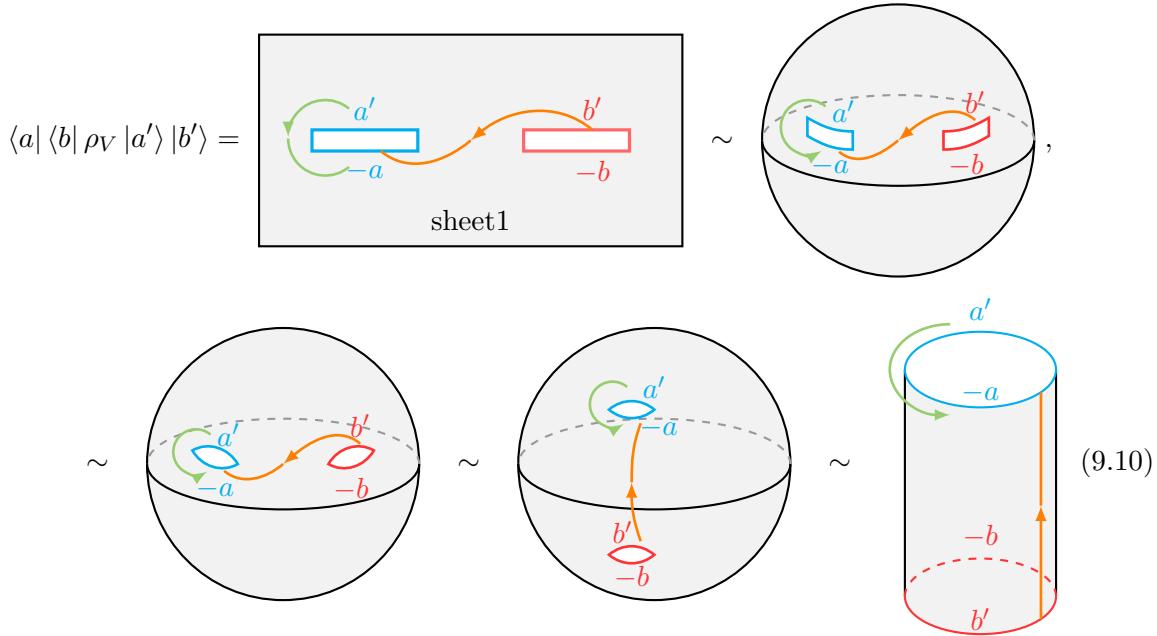
$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{T}'_{2n}(u_a) \mathcal{T}'_{2n}(v_a) \widetilde{\mathcal{T}}'_{2n}(u_b) \widetilde{\mathcal{T}}'_{2n}(v_b) \rangle \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (\lambda \rightarrow \infty)}} \left(\frac{d\omega}{dz} \Big|_{u_a} \cdot \frac{d\omega}{dz} \Big|_{v_a} \cdot \frac{d\omega}{dz} \Big|_{u_b} \cdot \frac{d\omega}{dz} \Big|_{v_b - \varepsilon} \right)^h \cdot \left(\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{z}} \Big|_{u_a} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{z}} \Big|_{v_a} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{z}} \Big|_{u_b} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{z}} \Big|_{v_b - \varepsilon} \right)^h \\ &\quad \times \langle \mathcal{T}'_{2n}(0) \mathcal{T}'_{2n}(x) \widetilde{\mathcal{T}}'_{2n}(1) \widetilde{\mathcal{T}}'_{2n}(\lambda) \rangle, \\ &= \left(\frac{x}{(v_a - u_a)(v_b - u_b)} \right)^{\frac{1}{4}} \langle \mathcal{T}'_{2n}(0) \mathcal{T}'_{2n}(x) \widetilde{\mathcal{T}}'_{2n}(1) \widetilde{\mathcal{T}}'_{2n}(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (9.9)$$

となり、(9.2)を得る。ここで、 $n = 2, c = 1$ の場合の共形ウエイトの値 $h = 1/16$ を用いた ((5.33) 参照)。□

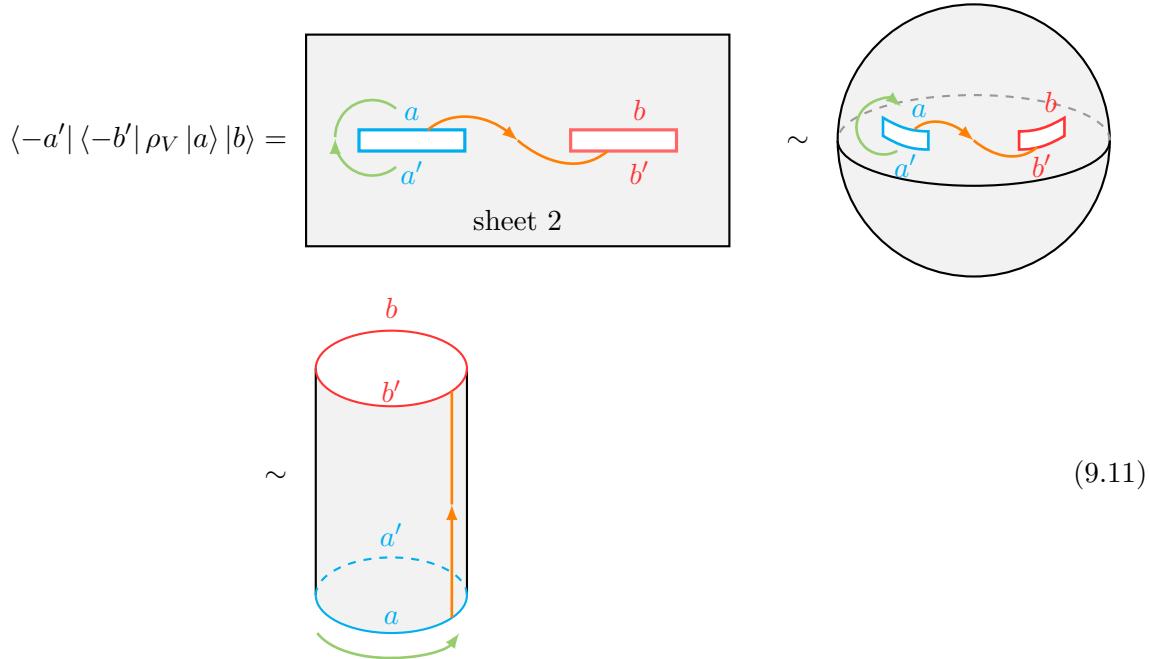
9.2 トーラス分配関数へのマップ

レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ は図 14 のように共形変換でトーラスにマップすることができる。この事実は数学的に保証されているが、まずはイメージを掴むためレプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ のトポロジー的にトーラスと同じであるということを理解しよう。まずはレプリカシート 1 枚が連続変形によってシリンダーになることを見てみよう。煩雑さを避けるため領域 V_1, V_2 上の場をそれぞれ $|a\rangle = |\psi_V(x \in V_1)\rangle, |b\rangle = |\psi_V(x \in V_2)\rangle$ と略記するとする。また、説明の都合上領域 V_1, V_2 を

それぞれ青色、赤色で示すとする。この記法を用いると縮約密度行列 $\langle a | \langle b | \rho_V | a' \rangle | b' \rangle$ (レプリカシート 1 枚分) は以下のように連続変形される;

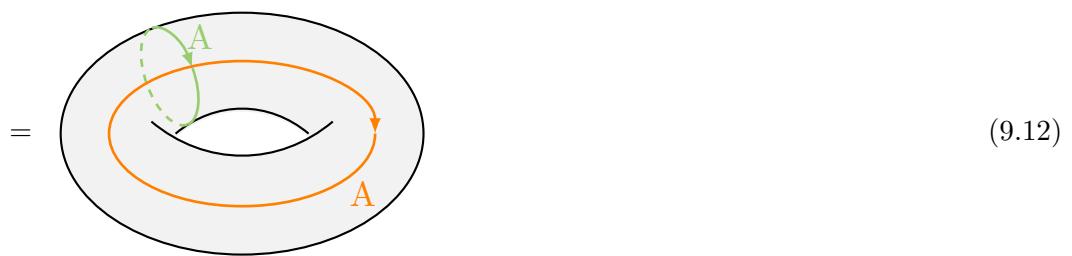
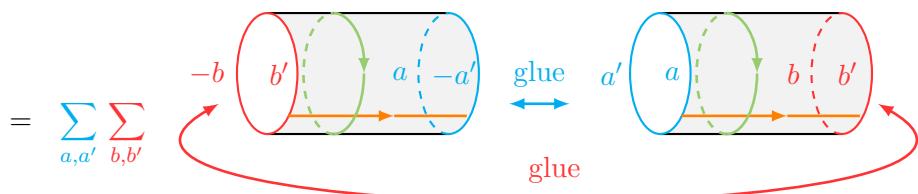
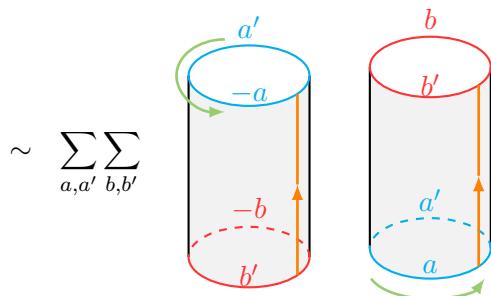
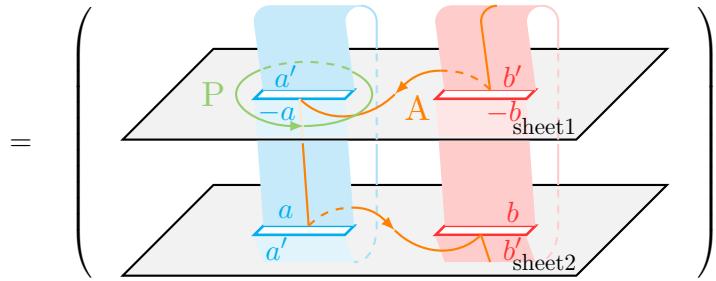
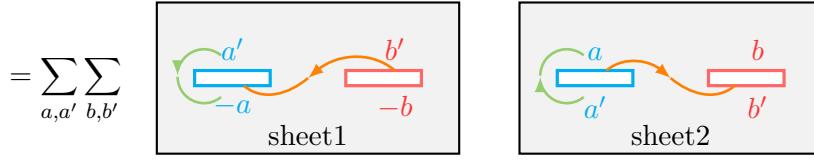


同様に二つ目の sheet に関しても以下のように変形できる。



(9.10),(9.11) の変形を用いると $\text{Tr}_V [\rho_V^2]$ は以下のように変形できる。

$$\text{Tr}_V [\rho_V^2] = \sum_{a,a'} \sum_{b,b'} \underbrace{\langle -a' | \langle -b' | \rho_V |a\rangle |b\rangle}_{\text{sheet2}} \underbrace{\langle a | \langle b | \rho_V |a'\rangle |b'\rangle}_{\text{sheet1}}$$



よって、直感的にレプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ がトーラスに変形できることがわかった。ここで、gluing の時の境界条件により、オレンジのサイクルは Anti-periodic になることに注意せよ。また、黄緑のサイクルに関してはレプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ 上では Periodic であるが、トーラス上では Anti-periodic になる。これは 2 次元平面からシリンダーに共形変換するときにフェルミオ場の変換性から周期性が変わることと同じ理由である。

それでは今度は具体的にこの共形変換を定式化してみよう。トーラス上の複素座標を ζ とすると、 $\omega \rightarrow \zeta$ の共形変換は以下のように与えられる [39]。

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= \frac{\wp(\zeta) - e_3}{e_1 - e_3}, \\ e_1 &= \wp(1/2), \quad e_2 = \wp(\tau/2), \quad e_3 = \wp((\tau + 1)/2), \end{aligned} \tag{9.13}$$

ここで、 $\wp(\zeta)$ は以下で定義される Weierstrass のペー関数である。

$$\wp(\zeta) \equiv \frac{1}{\zeta^2} + \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \left[\frac{1}{(\zeta + m + n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2} \right], \tag{9.14}$$

この関数に関する公式は付録 C にまとめた。この共形変換を用いると、レプリカ多様体上の座標 $\omega = 0, x, 1, \infty$ はトーラス座標では $\zeta = \frac{\tau+1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, 0$ に対応する；

$$\omega\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = 0, \quad \omega\left(\frac{\tau}{2}\right) = x, \quad \omega\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad \omega(0) = \infty, \tag{9.15}$$

ここで、cross ratio x とトーラスの moduli τ の関係は以下の通り³¹。

$$x = \left(\frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^4, \quad 1 - x = \left(\frac{\vartheta_4(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^4, \tag{9.16}$$

図 15 にレプリカ多様体上の座標 ω とトーラス上の座標 ζ の対応関係を示した。この図から分かるように、レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ 上の 2 つのサイクルはトーラス上の非自明な 2 つのサイクルに対応している。オレンジ色のサイクルは gluing の際の境界条件より周期性は Anti-periodic であることがわかる。さらに、黄緑色のサイクルに関してもフェルミオン場の変換性を加味すると Anti-periodic であることがわかる；

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)^{1/2} \psi(\omega), \\ &= \sqrt{2}(e_1 - e_3)^{1/4} [\omega(\omega - x)(\omega - 1)]^{1/4} \psi(\omega), \end{aligned}$$

ここで、ペー関数の微分公式 (C.6) を用いた。式に現れる $\omega^{1/4}(\omega - x)^{1/4}$ のファクターにより、黄緑のサイクルを一周すると (-1) のファクターを受ける。よって、フェルミオン場の周期性は Anti-periodic となる。

この共形変換の具体形 (9.13) を用いると、ツイスト演算子の相関関数 $\langle \mathcal{T}_2(0)\mathcal{T}_2(x)\tilde{\mathcal{T}}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle$ はトーラス上の分配関数 Z_F を用いて以下のように書ける [40]。

$$\langle \mathcal{T}_2(0)\mathcal{T}_2(x)\tilde{\mathcal{T}}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle = (2^8 x(1-x))^{-c/12} Z_F[\text{AA}, \lambda, i\ell], \tag{9.17}$$

³¹ x を e_1, e_2, e_3 を用いて表すと $x = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$ となる。

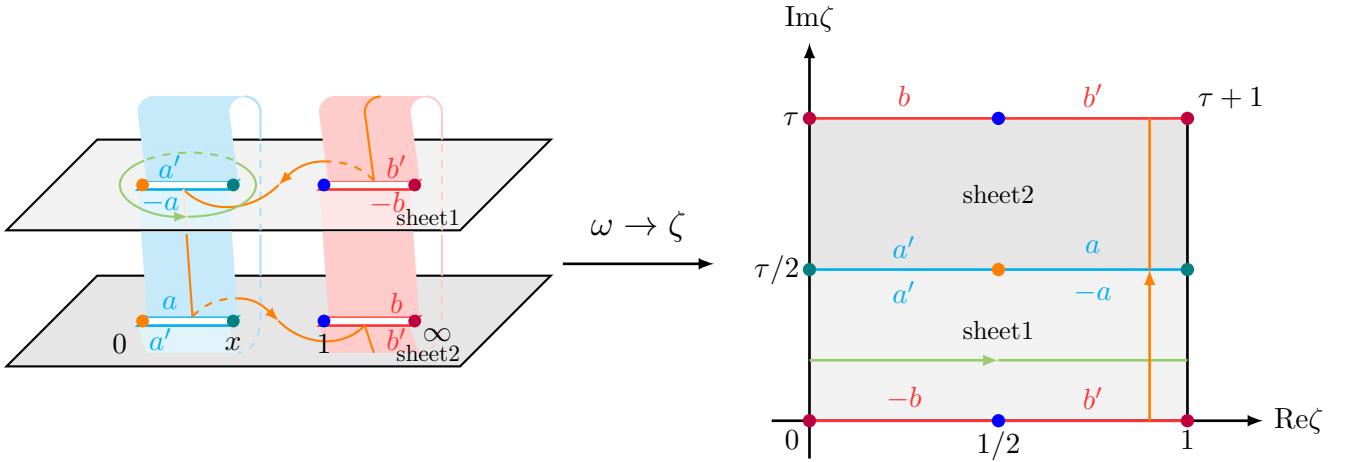


図 15. 共形変換 (9.13) の座標の対応関係。 $\omega = 0, x, 1, \infty$ はトーラス上では $\zeta = \frac{\tau+1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, 0$ に対応し、レプリカ多様体上に示されている 2 つのサイクル（黄緑、オレンジ）はトーラス上の非自明な 2 つのサイクルに対応している。

ここで、 c は中心電荷（導出は結構テクニカルなので後のオレンジバーで述べる）。massless Thirring model の中心電荷は $c = 1$ なので、(9.2) と (9.17) より、以下の結果を得る。

$$\langle \mathcal{T}_2(u_1)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_1)\mathcal{T}_2(u_2)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_2) \rangle = \left(\frac{v_1 - u_1}{\epsilon} \cdot \frac{v_2 - u_2}{\epsilon} \right)^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \left(2^8 x (1-x) \right)^{-\frac{1}{12}} Z_F[\text{AA}, \lambda, i\ell], \quad (9.18)$$

ただし、 $u_i \sim v_i$ に対応する UV cutoff scale ϵ を導入した。ERE $S_2(V, \lambda)$ のツイスト演算子を用いた表式 (8.3) より、これの log を取れば ERE $S_2(V, \lambda)$ が求められる。このように ERE をトーラス分配関数を用いて表すことができた。

Proof. (9.17) の導出:

ツイスト演算子の相関関数とトーラス分配関数の関係を導出する方法の一つに、エネルギー運動量テンソルの期待値を用いた方法がある [41]。レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ 上のエネルギー運動量テンソルを $T(\omega)$ とすると、トーラス上のエネルギー運動量テンソル $T(\zeta)$ との変換性は以下の通り。

$$T(\omega) = \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)^{-2} \left(T(\zeta) - \frac{c}{12} \{\omega; \zeta\} \right). \quad (9.19)$$

ここで、共形変換の具体形 (9.13) を用いて $\frac{d\omega}{d\zeta}$ と Schwarz 微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\zeta} &= 2(e_1 - e_3)^{1/2} [\omega(\omega - x)(\omega - 1)]^{1/2}, \\ \{\omega; \zeta\} &= 12 \left(\wp(\zeta) - \frac{9}{8} \frac{(\wp^2 + \bar{e})^2}{(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)} \right), \end{aligned} \quad (9.20)$$

となる。今、 $\omega \rightarrow x$ の場合を考えてみよう。この場合、以下の式が示せる。

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow x} \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)^{-2} &\simeq \frac{1}{\omega - x} \cdot \frac{1}{4(e_3 - e_1)x(1-x)} , \\ \lim_{\omega \rightarrow x} \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)^{-2} \frac{1}{12}\{\omega; \zeta\} &\simeq \frac{1}{\omega - x} \cdot \frac{1 - 2x}{48x(1-x)} \end{aligned} \quad (9.21)$$

(9.19) の両辺の期待値を取って、 $\omega \simeq x$ におけるエネルギー運動量テンソルの期待値の振る舞いを計算すると、

$$\begin{aligned} &\frac{\langle T(\omega)\mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle}{\langle \mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle}, \\ &= 2 \langle T(\omega) \rangle_{\Sigma_{2,2}} , \\ &= 2 \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)^{-2} \left(\langle T(\zeta) \rangle_{\mathbf{T}} - \frac{c}{12}\{\omega; \zeta\} \right) , \\ &\simeq \frac{1}{\omega - x} \cdot \left(\frac{\langle T(\zeta) \rangle_{\mathbf{T}}}{2(e_3 - e_1)x(1-x)} - \frac{c}{24} \frac{1 - 2x}{x(1-x)} \right) + \mathcal{O}(1) , \end{aligned} \quad (9.22)$$

となる。ここで、トーラス上のエネルギー運動量テンソルの期待値が出てきたが、これはトーラス分配関数 $Z_{\mathbf{T}}$ を用いて以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned} \langle T(\zeta) \rangle_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{Z_{\mathbf{T}}} \text{Tr} \left[T(\zeta) q^{L_0 - c_2 4} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right] , \\ &= \frac{1}{Z_{\mathbf{T}}} \text{Tr} \left[(2\pi i)^2 (L_0 - \frac{c}{24}) q^{L_0 - c_2 4} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right] , \\ &= 2\pi i \partial_{\tau} \log Z_{\mathbf{T}} . \end{aligned} \quad (9.23)$$

ここで、エネルギー運動量テンソルの変換式 $T(\zeta) = \left(\frac{dz'}{d\zeta} \right)^2 (T(z') - \frac{c}{12}\{\zeta; z'\})$ ($z' (= e^{2\pi i \zeta}$: ある二次元平面上の複素座標。) とトレースの中で L_n , $n \neq 0$ が寄与しないことを用いた。この式 (9.23) を用いると、(9.22) は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} &\frac{\langle T(\omega)\mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle}{\langle \mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle}, \\ &\simeq \frac{1}{\omega - x} \cdot \left(\frac{2\pi i \partial_{\tau} \log Z_{\mathbf{T}}}{2(e_3 - e_1)x(1-x)} - \frac{c}{24} \partial_x [\log(x(1-x))] \right) , \\ &= \frac{1}{\omega - x} \cdot \partial_x \log \left[Z_{\mathbf{T}}(x(1-x))^{-\frac{c}{12}} \right] , \end{aligned} \quad (9.24)$$

ここで、2 行目から 3 行目にかけて恒等式: $2(e_3 - e_1)x(1-x) = -\pi^2 x \vartheta_4^4(\tau) = 2\pi i \frac{dx}{d\tau}$ と $\frac{d}{dx} \log [x(1-x)] = \frac{1-2x}{x(1-x)}$ を用いた。さて、5 点関数 $\langle T(\omega)\mathcal{T}_2(u_1)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_1)\mathcal{T}_2(u_2)\tilde{\mathcal{T}}_2(v_2) \rangle$ の共

形ワード恒等式で $\frac{1}{\omega-x}$ に比例する項だけに注目すると、

$$\begin{aligned} \frac{\langle T(\omega)\mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle}{\langle \mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle} &= \frac{1}{\omega-x} \frac{1}{\langle \mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle} \partial_x \langle \mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle \\ &\quad + \cdots, \\ &= \frac{1}{\omega-x} \partial_x \log \langle \mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle + \cdots, \end{aligned} \quad (9.25)$$

となる。[\(9.24\)](#) と [\(9.25\)](#) は定数項を除き一致すべきなので最終的に

$$\langle \mathcal{T}_2(0)\tilde{\mathcal{T}}_2(x)\mathcal{T}_2(1)\tilde{\mathcal{T}}_2(\infty) \rangle = c_0 Z_{\mathbf{T}}(x(1-x))^{-\frac{c}{12}}. \quad (9.26)$$

を得る。ここで、 c_0 はこの議論では決定できない定数項である。ERE の解析ではスキームに依存する定数項が出るため、このような定数に物理的に意味はない。今回は free fermion の結果を合わせるため $c_0 = 2^{-2/3}$ とした。□

10 結果の解析

前のセクションでは共形変換を施すことで分配関数 $Z_{2,2}$ をトーラスの分配関数 $Z_F[AA, \lambda, i\ell]$ を用いて具体的に書くことができた。さらにセクション I の議論により、この massless Thirring model の分配関数 $Z_F[AA, \lambda, i\ell]$ はすでに厳密に計算されている ([\(3.103\)](#) を見よ)。よって我々は厳密な解析結果を得ることができた。ここでは得られた結果について議論しよう。

10.1 ERE の解析的性質

ここでは得られた ERE の結果 [\(10.1\)](#) の解析的な性質を調べる。Massless Thirring model の分配関数の解析結果 [\(3.103\)](#) を [\(??\)](#) に代入すると以下の結果を得る。

massless Thirring model の ERE $S_2(V)$ の厳密結果：

$$S_2(V, \lambda) = S_2(V, 0) - \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(i\ell)} \sum_{j=2}^4 \Xi_j(\lambda, i\ell) \right], \quad (10.1)$$

$$\Xi_j(\lambda, i\ell) := \vartheta_j^2(i\ell(1+\lambda)) \vartheta_j^2\left(\frac{i\ell}{1+\lambda}\right). \quad (10.2)$$

ここで $S_2(V, 0)$ は自由場からの寄与であり以下で与えられる。

$$S_2(V, 0) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{v_1 - u_1}{\epsilon} \cdot \frac{v_2 - u_2}{\epsilon} \right) + \frac{1}{4} \log(1-x). \quad (10.3)$$

ここで $S_2(V, 0)$ の導出には theta 関数の公式 [B.3,B.4](#) を用いた。この結果について特筆すべきことは、今回ボソン/フェルミオン双対性を用いて計算された結果はすでに知られている free

fermion の結果と consistent であることである。実際、(6.30) で $n = 2$, $N = 2$ とすると我々の結果 (10.3) と完全に一致する；

先行研究 [14] の計算結果

massless free fermion の結果 (6.30) で $(n, N) = (2, 2)$ を代入すると以下の結果を得る。

$$S_2^{\text{Free}}(V) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{v_1 - u_1}{\epsilon} \cdot \frac{v_2 - u_2}{\epsilon} \right) + \frac{1}{4} \log(1 - x) . \quad (10.4)$$

セクション 6 で解説したように、massless free fermion の先行研究 [14] では我々と全く異なる方法で計算されているのでこれは非自明な consistency check である。

また、今後のために ERE の自由場からの差分 ΔS_2 を定義しておく。

$$\begin{aligned} \Delta S_2(x, \lambda) &:= S_2(V, \lambda) - S_2(V, 0) \\ &= -\frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(i\ell)} \sum_{j=2}^4 \Xi_j(\lambda, i\ell) \right] . \end{aligned} \quad (10.5)$$

ここで、ERE の差分 ΔS_2 は本質的に cross ratio x と結合定数 λ の関数であるため $\Delta S_2(x, \lambda)$ と書いた。cross ratio x の関数である理由は、(10.5) から ΔS_2 はトーラスの moduli ℓ の関数であり、 ℓ は cross ratio x と一対一の対応があるためである ((9.16) を参照)。

さらに解析結果から、差分 $\Delta S_2(x, \lambda)$ は以下の性質を満たすことがわかる。

$$\text{modular S 不変性} : \quad \Delta S_2(x, \lambda) = \Delta S_2(1 - x, \lambda) , \quad (10.6)$$

$$\text{T-duality} : \quad \Delta S_2(x, \lambda) = \Delta S_2(x, \lambda_{\text{dual}}) , \quad \lambda_{\text{dual}} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1} . \quad (10.7)$$

この性質はトーラス分配関数の modular S 変換 $\ell \rightarrow 1/\ell$ の不变性に起因している。theta 関数の性質 (B.7) より (10.5) は不变であり、(9.16) から $\ell \rightarrow 1/\ell$ は $x \rightarrow 1 - x$ を意味する。この性質 (10.6) より、差分 $\Delta S_2(x, \lambda)$ は $x = 1/2$ で極小値または極大値を取ることがわかった。T-duality に関してはセクション 3.6 で述べた通り、compact boson の T-duality から派生したものである。

さらに、 λ , x が特別な値のとき ERE はより簡単な形になることがわかった。ここではいくつかの例を列挙しよう。

- $\lambda = 1 \iff \lambda = -1/2$: この場合、差分 $\Delta S_2(x, \lambda)$ は x の関数として explicit に書き下すことができる；

$$\Delta S_2(x, \lambda = 1) = \log 2 - \log \left[1 + (1 - x)^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}} - (x(1 - x))^{\frac{1}{4}} \right] . \quad (10.8)$$

- $\lambda \rightarrow -1 + \delta \iff \lambda \rightarrow \infty$: この時系は不安定になり差分 $\Delta S_2(x, \lambda)$ は log 発散を示す；

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Delta S_2(x, -1 + \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \log \delta = -\infty . \quad (10.9)$$

- $x \rightarrow 0 \iff x \rightarrow 1$: cross-ratio x が 0 または 1 に近づくとき、任意の結合定数 λ で ERE $S_2(V, \lambda)$ は自由場での値 $S_2(V, 0)$ に近づく;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta S_2(x, \lambda) = 0 . \quad (10.10)$$

- $|\lambda| \ll 1$: 結合定数 λ が非常に小さい時、厳密結果 (10.1) は λ を λ でテイラー展開してみよう。少々面倒な計算の後以下の結果を得る³²;

$$\begin{aligned} \Delta S_2(x, \lambda) &= \lambda^2 \frac{\ell^2}{2\vartheta_3^4(i\ell)} \sum_{j=2}^4 \vartheta_j^2(i\ell) \times \left[(\partial_\ell \vartheta_j(i\ell))^2 - \vartheta_j(i\ell) \partial_\ell^2 \vartheta_j(i\ell) - \frac{\vartheta_j(i\ell) \partial_\ell \vartheta_j(i\ell)}{\ell} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\lambda^3) . \end{aligned} \quad (10.11)$$

ここで、差分 $\Delta S_2(x, \lambda)$ の級数展開は λ の二次から始まることに注意。これは以下のように理解できる。 λ が小さい時、T-duality は (10.7) は $\lambda_{\text{dual}} \simeq -\lambda$ と近似できる。つまり、この場合に差分 $\Delta S_2(x, \lambda)$ の T-duality はこのようになる。

$$\Delta S_2(x, \lambda) = \Delta S_2(x, -\lambda) , \quad |\lambda| \ll 1 , \quad (10.12)$$

この性質のため差分 $\Delta S_2(x, \lambda)$ の級数展開に λ の一次の項は許されず、二次から始まる。

10.2 MRI の解析的性質

今度は相互 Rényi 情報量 (MRI) を解析してみよう。MRI の定義 (4.46) から $(n, N) = (2, 2)$ の場合は

$$I_2(V_1, V_2) = S_2(V_1) + S_2(V_2) - S_2(V_1 \cup V_2) , \quad (10.13)$$

となる。ここで、 V_1, V_2 はそれぞれ単連結な領域を表す ($V_1 = [u_1, v_1], V_2 = [u_2, v_2]$)。第 1 項、第 2 項は領域 V が単連結な場合の ERE($(n, N) = (2, 1)$) であり、すでに CFT の議論から結果がわかっている (7.1)。さらに、第 3 項は領域 V が 2 つの単連結な領域からなる場合の ERE($(n, N) = (2, 2)$) であるが今やボソン/フェルミオン双対性を用いて計算した結果 (10.1) がある。よって、(7.1) と (10.1) を (10.13) に代入することで massless Thirring model の MRI $I_2(V_1, V_2, \lambda)$ を得る。

massless Thirring model の MRI $I_2(V)$ の厳密結果 :

$$I_2(x, \lambda) = I_2(x, 0) + \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(i\ell)} \sum_{j=2}^4 \Xi_j(\lambda, i\ell) \right] , \quad (10.14)$$

ここで、 $I_2(x, 0)$ は自由場の寄与であり以下で与えられる;

$$I_2(x, 0) = -\frac{1}{4} \log(1-x) . \quad (10.15)$$

³²これは mathematica を使うことを勧める。

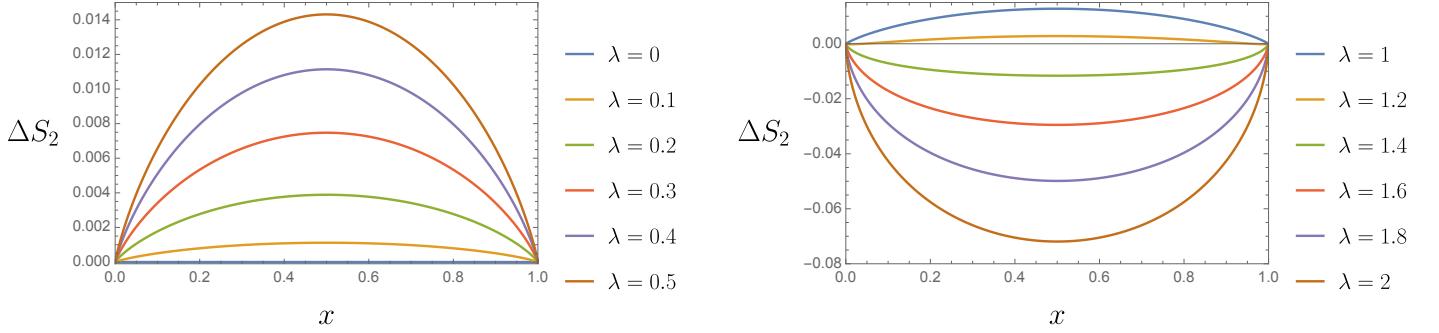


図 16. ERE の自由場からの差分 ΔS_2 の cross ratio 依存性。結合定数 λ の範囲は $\lambda = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ (左図) と $\lambda = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2$ (右図)。

MRI は ERE から UV 発散項をちょうど相殺し、有限な値になっている。また、今回も解析結果から MRI は cross ratio x の関数であることから $I_2(x, \lambda)$ と表記した。さらに、今回も解析的にわかるこことを議論しておく。結合定数 λ が $1 - \sqrt{3} < \lambda < 1 + \sqrt{3}$ の範囲にある場合、cross-ratio x が小さい極限を取ると (10.14) は以下のように近似できる;

$$I_2(x, \lambda) \sim 4 \left(\frac{x}{16} \right)^{\frac{1}{2}(1+\lambda+\frac{1}{1+\lambda})} \geq 0, \quad (10.16)$$

MRI の $x \rightarrow 0$ の極限は先行研究で関数形が予想されている [18, 式 (4.26)]。今回我々が得た結果 (10.16) は先行研究の結果と完全に一致しており、consistent な結果である。さらに、今回得られた漸近形 (10.16) より、massless Thirring model の MRI は正であることがわかる。これは実は非自明な結果である。というのも、相互情報量は必ず正であることがエンタングルメントエントロピーの subadditivity から証明されている (4.35)。しかし、相互 Rényi 情報量の場合は必ずしも正とは限らない。今回の解析で少なくとも massless Thirring model の場合は相互 Rényi 情報量が正であることが示せたということである。

10.3 ERE と MRI のパラメーター依存性

先ほどは massless Thirring model の ERE の厳密結果から解析的な性質を調べた。ここでは物理的な振る舞いをより直感的に理解するために ERE と MRI のパラメーター依存性を調べてみよう。

10.3.1 cross ratio 依存性

それでは ERE と MRI の厳密結果 (10.1), (10.14) を用いて cross ratio 依存性を調べてみよう。図 16 に差分 ΔS_2 を横軸を cross ratio x にしてプロットした。プロットを見るとわかるように、図 16 は左図、右図ともに左右対称になっており、これは modular S 変換 $x \rightarrow 1 - x$ での不变性 (10.6) から従う結果である。さらに、プロットから結合定数 λ に依らず $x = 0, 1$ で $\Delta S_2 = 0$ になっていることが読み取れる。この現象について物理的意味を考えてみよう。今回はセクション 7 でレビューした先行研究が中心的な役割を果たすのでここで再度書いておく;

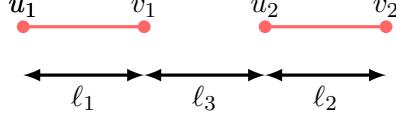


図 17. 長さ ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の定義。赤いラインは領域 V を表し、2つの領域 V_1, V_2 の端点の空間座標を u_1, v_1, u_2, v_2 とした。

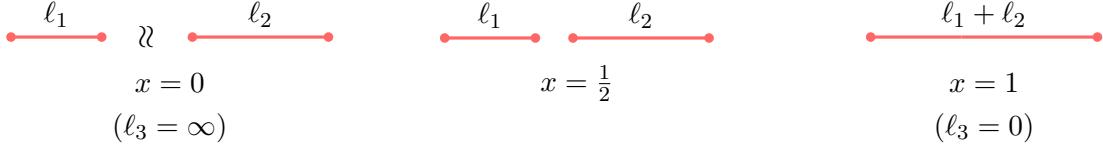


図 18. cross-ratio x と 2つの单連結な領域 V_1, V_2 の対応関係。この図ではそれぞれのインターバルの長さ ℓ_1, ℓ_2 は固定されているものとする。この時、 $x \rightarrow 0$ は $\ell_3 \rightarrow \infty$ を意味し、2つの領域 V_1, V_2 は無限に離れている場合に対応する(左図)。この場合は領域 V_1, V_2 は完全に孤立し、 $V = V_1 \cup V_2$ の ERE $S_2(V_1 \cup V_2)$ は V_1, V_2 の $ERES_2(V_1), S_2(V_2)$ 和になる(10.22)。一方、 $x \rightarrow 1$ は $\ell_3 \rightarrow 0$ を意味するため 2つの領域 V_1, V_2 は合併し、長さ $\ell_1 + \ell_2$ のインターバルになっている状況に対応する(右図)。この場合は領域 V が单連結の結果に一致する(10.24)。Thirring 相互作用による寄与が最大値(または最小値)となるのはその中間 $x = 1/2$ の状態である(中央図)。

先行研究 [12] の解析結果

扱っているモデルが CFT であり、領域 V は单連結とする($V = [u_1, v_1]$)。この時、共形対称性から $n = 2$ の場合の ERE は以下の形になる³³。

$$S_2^c([u, v]) = \frac{c}{4} \log \left(\frac{v-u}{\epsilon} \right) . \quad (10.17)$$

ここで c は中心電荷である。

massless free (Dirac) fermion は $c = 1$ の CFT になっているが、massless Thirring model も同様に $c = 1$ の CFT である。この結果(10.17)の理論に依存するものは中心電荷だけなので、領域 V が 1-interval の場合、massless Thirring model の ERE は massless free fermion と違いが出ない。このことを念頭に以下のように考えてみよう。まず、(9.3)で定義される cross ratio x を物理的な長さで書き直す;

$$x = \frac{\ell_1 \ell_2}{(\ell_1 + \ell_3)(\ell_2 + \ell_3)} , \quad (10.18)$$

ここで、 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は領域 V_1, V_2 の長さとその間の距離である(図 17);

$$\ell_1 \equiv v_1 - u_1 , \quad \ell_2 \equiv v_2 - u_2 , \quad \ell_3 \equiv u_2 - v_1 . \quad (10.19)$$

この表式では $x \rightarrow 0$ の極限を領域 V_1, V_2 の長さの極限として以下のように解釈できる;

$$x \rightarrow 0 \iff \frac{\ell_1}{\ell_3} \rightarrow 0 \quad \text{または} \quad \frac{\ell_2}{\ell_3} \rightarrow 0. \quad (10.20)$$

例えば 2 つの極限 $\ell_1 \rightarrow 0$, $\ell_3 \rightarrow \infty$ に注目してみよう。

- $\ell_1 \rightarrow 0$:

$\ell_1 \rightarrow 0$ の極限では領域 $V_1 = [u_1, v_1]$ は消滅するため、領域 V は単連結な領域 $[u_2, v_2]$ になる。この時、ERE は領域 V が単連結な場合の結果 (10.17) になる。

$$S_2(V, \lambda) \longrightarrow S_2^{c=1}([u_2, v_2]) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{\ell_2}{\epsilon} \right), \quad (10.21)$$

massless Thirring model と massless free fermion は中心電荷が同じであるため、massless Thirring model の ERE は free fermion に一致する。よって、差分 ΔS_2 が $\ell_1 \rightarrow 0$ の極限でゼロになる理由が理解できた。

- $\ell_3 \rightarrow \infty$:

$\ell_3 \rightarrow \infty$ の極限の場合、2 つの領域 V_1, V_2 は無限に離れるため領域 V_1, V_2 の間の相関は無くなる。そのため、領域 $V = V_1 \cup V_2$ の $\text{ERE}((n, N) = (2, 2))$ は領域 V_1, V_2 の $\text{ERE}((n, N) = (2, 1))$ の和になる;

$$S_2(V, \lambda) \longrightarrow S_2^{c=1}([u_1, v_1]) + S_2^{c=1}([u_2, v_2]). \quad (10.22)$$

この場合も ERE は中心電荷のみの関数となるため、差分 ΔS_2 はゼロとなる。

さらに、 $x \rightarrow 1$ の極限の方も同様に理解できる。 $x \rightarrow 0$ の時と同様に、 $x \rightarrow 1$ の極限は領域 V_1, V_2 の長さとして以下のように解釈できる。

$$x \rightarrow 1 \iff \frac{\ell_3}{\ell_1} \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\ell_3}{\ell_2} \rightarrow 0. \quad (10.23)$$

これにより、 $x \rightarrow 1$ の極限は ℓ_1, ℓ_2 を固定して $\ell_3 \rightarrow 0$ の極限を取ることで実現できる。これは 2 つの領域 V_1, V_2 を合併することを意味する。この場合も ERE は単連結の場合に帰着する;

$$S_2(V, \lambda) \longrightarrow S_2^{c=1}([u_1, v_2]) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{\epsilon} \right). \quad (10.24)$$

この時も同様に ERE は massless Thirring model の ERE は free massless fermion の ERE に一致し、差分 ΔS_2 はゼロとなる。図 18 に ℓ_3 に値と領域 V_1, V_2 の空間的配置の対応を示した。

最後に、MRI の厳密結果 (10.14) を cross-ratio x の関数としてプロットした (図 19)。結合定数 λ の値によらず MRI は $x = 0$ でゼロ、 $x \rightarrow 1$ で発散しているがこれは以下のように理解できる。 $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1$ の極限はそれぞれ領域 V_1, V_2 の間の距離 $\ell_3 \rightarrow \infty, \ell_3 \rightarrow 0$ の極限を意味する。(10.22) と (10.24) から、2-interval の MRI の振る舞いは以下のようになることが示せる。

$$\begin{aligned} I_2(V_1, V_2, \lambda) &\longrightarrow 0, & \text{as } \ell_3 \rightarrow \infty, \\ I_2(V_1, V_2, \lambda) &\longrightarrow \frac{1}{4} \log \left[\frac{\ell_1 \ell_2}{\epsilon(\ell_1 + \ell_2)} \right] = \infty, & \text{as } \ell_3 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (10.25)$$

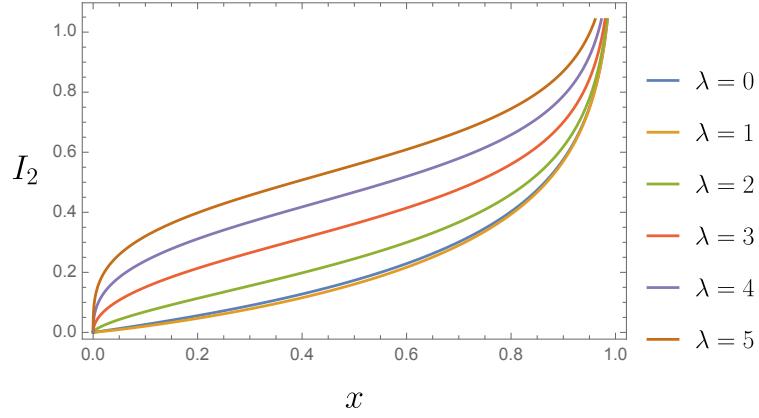


図 19. Cross-ratio dependence of the MRI for $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

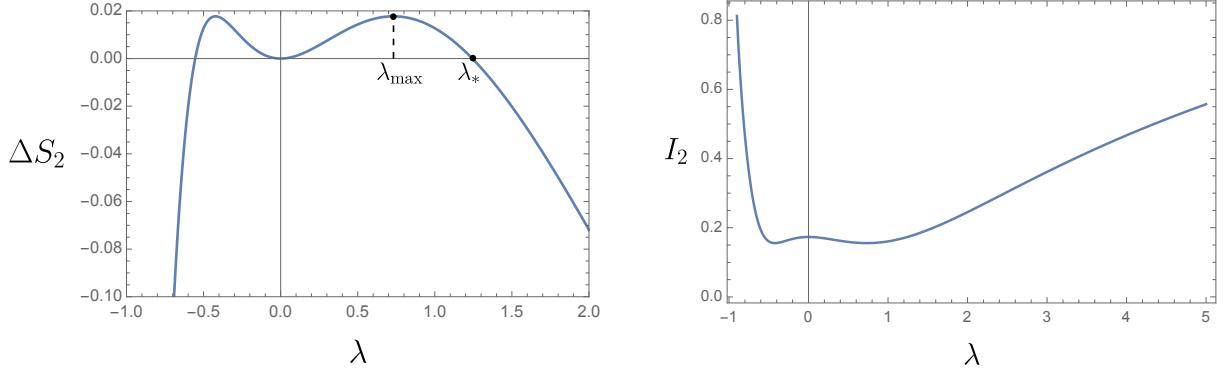


図 20. ERE の差分 $\Delta S_2(x = 1/2, \lambda)$ の結合定数依存性 (左図) と MRI $I_2(x = 1/2, \lambda)$ の結合定数依存性 (右図)。

直感的には、 $\ell_3 \rightarrow \infty$ の時は 2 つの領域 V_1, V_2 が十分離れるため領域 V_1, V_2 間の量子相関がゼロとなり、 $\ell_3 \rightarrow 1$ の場合 2 つの領域 V_1, V_2 が接触するため量子相関が大きくなっていると理解できる。

10.3.2 結合定数依存性

さて、今度は ERE と MRI の Thirring 結合定数依存性を見てみよう。今回は cross ratio x を $x = 1/2$ と固定する。厳密結果 (10.1) から ERE の差分 $\Delta S_2(x = 1/2, \lambda)$ を結合定数の関数としてプロットした (図 20)。ここで正の結合定数 $\lambda \geq 0$ は T-duality によって負の結合定数 $\lambda_{\text{dual}} = -\lambda/(1 + \lambda) \leq 0$ と対応していることを思い出そう。よって、結合定数が正の範囲のみを考えれば十分である。図 20 に示されているように、 $\lambda_{\text{max}} > 0$ を差分 $\Delta S_2(x = 1/2, \lambda)$ が最大となる結合定数とする。プロットから差分 $\Delta S_2(x = 1/2, \lambda)$ は $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{max}}$ の範囲で単調増加し、 $\lambda \geq \lambda_{\text{max}}$ の範囲では単調減少に転ずる。さらに、我々は相互作用があるにも関わらず差分 $\Delta S_2(x = 1/2, \lambda)$ がゼロとなる点、つまり massless Thirring model の ERE が有限の結合定数 $\lambda_* \cong 1.244$ で free massless fermion の ERE と一致する点を発見した。また、プロットには

していないが、このような特別な点は $x = 1/2$ 以外の cross-ratio の値でも現れることが確認できた。

最後に、MRI の結合定数依存性を図 20 にプロットした。MRI の場合、任意の結合定数で常に正となり、 $\lambda = \infty$ で log 発散を示す。

10.4 Tripartite Rényi information

最後に、tripartite information と呼ばれる量を考えてみよう³⁴。Tripartite information は領域 V を $V = A \cup B \cup C$ と三つに分けた場合に定義できる量であり、相互情報量の一般化になっている。定義は以下の通り。

$$\begin{aligned} I(A, B, C) &:= S(A \cup B \cup C) - S(A \cup B) - S(B \cup C) - S(C \cup A) \\ &\quad + S(A) + S(B) + S(C) \\ &= I(A, B) + I(A, C) - I(A, B \cup C). \end{aligned} \quad (10.26)$$

tripartite information もエンタングルメントエントロピーや相互情報量と同様に重要な量である。例えば位相的場の理論では tripartite information はトポロジカルエンタングルメントエントロピーと呼ばれ、系のトポロジカルな情報を引き出すことができる [3]。また、ホロウグラフィックな理論の場合、tripartite information は負の値を取ることが知られているため [? ?] 理論に双対な重力理論があるかどうかの手掛かりになる。しかし、その拡張である tripartite Rényi information はあまりよく調べられていない。そこで今回は massless Thirring model における tripartite Rényi information を少し調べてみることとしよう。

我々は領域 V が 2-interval の場合に相互 Rényi 情報量の厳密結果を持っている (10.14)。図 21 のように領域 B, C が合併している場合、我々はこの結果をそのまま用いることで以下の $n = 2$ の tripartite Rényi information を調べることができる;

$$I_2(A, B, C, \lambda) = I_2(x_{ab}, \lambda) + I_2(x_{ac}, \lambda) - I_2(x_{abc}, \lambda). \quad (10.27)$$

ここで、 x_{ab}, x_{ac}, x_{abc} はそれぞれ領域 A と B 、 A と C 、 A と $B \cup C$ の cross ratio である。図 22 に 3 つの領域 A, B, C のさまざまな配置において tripartite Rényi information $I_2(A, B, C, \lambda)$ の結合定数依存性をプロットした。プロットから読み取れるように、tripartite Rényi information はどのような配置においても $\lambda = 0$ でゼロとなる ($I_2(A, B, C, \lambda = 0) = 0$)。massless free fermion で tripartite information を計算している先行研究 [?] の結果を再現しており、consistent である。興味深いことに、tripartite Rényi information $I_2(A, B, C, \lambda)$ は結合定数が小さい時負の値になり、ある程度結合定数が大きいと正の値を取る。このように符号が定まっていない理由は現在のところわかっていないが、ホログラフィー原理を用いた方法 [42] と比較すると面白いだろう。今回の研究ではこれについて調べることができなかったので、今後の展望に残しておくこととする。

³⁴初めに論文を書いた段階では tripartite information は想えていなかった。しかし、Physical Review D の査読を受けた際にレフェリーから助言を頂き、この内容を追加することになった。真摯に査読して頂き、的確な助言をくださったレフェリーに感謝します。

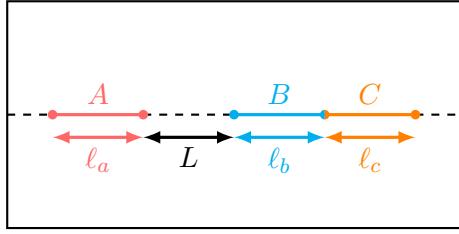


図 21. 三個の領域 A, B, C の模式図。赤、青、オレンジのラインはそれぞれ領域 A, B, C を表す。ここで、領域 B と C は隣接しており、領域 $B \cup C$ は1つの単連結な領域になっているものとする。また、領域 A, B, C の長さをそれぞれ ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c とし、領域 A と B の間の距離を L とする。

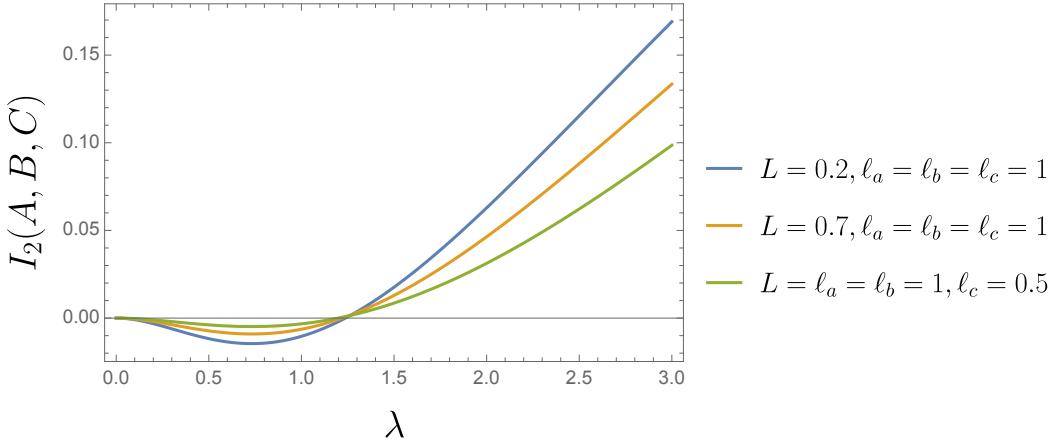


図 22. tripartite Rényi information $I_2(A, B, C, \lambda)$ の結合定数依存性のプロット。三つのグラフはそれぞれ領域 A, B, C の異なる配置を表す。

11まとめと展望

このセクションではこの修士論文のまとめと研究における今後の展望について述べる。

11.1 まとめ

この修士論文の各セクション毎に簡単に内容をまとめよう。

パート I では本研究において重要な概念であるボソン/フェルミオン双対性の入門的なレビューを行った。まずセクション 2 では2次元平面上のボソン/フェルミオン双対性を導入した。具体例として massless free fermion と free compact boson を扱い、相關関数を比較することできボソンとフェルミオンがどのように対応するのかを解説した。また、セクション 3 ではトーラスを具体例に取り、時空に非自明なサイクルがある場合のボソン/フェルミオン双対性を議論した。そして、本研究のメインの道具である時空に非自明なサイクルがある場合のボソン/フェルミオン双対性の辞書を導入した。最後にボソン/フェルミオン双対性の応用としてトーラス上の massless Thirring model の分配関数を求めた。

次にパート II ではエンタングルメントのレビューを行った。セクション 4 では量子力学から初め、エンタングルメントの入門的な導入を行った。セクション 5 では場の量子論におけるエンタングルメントを解説し、一般的な計算手法であるレプリカ法を導入した。また、セクション 6、7 では本研究にとって重要な 2 つの先行研究をレビューした。

また、パート III では研究内容について述べた。本研究では massless Thirring model というフェルミオンの 4 点相互作用を含むモデルを扱い、領域 V が 2-interval の場合にエンタングルメント Rényi エントロピーを厳密に導出した。解析の流れとしては、まずセクション 8 では具体的な問題設定をし、レプリカ法を用いてエンタングルメント Rényi エントロピーをレプリカ多様体上の分配関数で表した。次にセクション 9 で解説した共形変換によってこれをトーラス上の分配関数に書き換え、最後にパート I で述べたボソン/フェルミオン双対性の結果を用いて massless Thirring model のエンタングルメント Rényi エントロピーを導出した。さらにセクション 10 では得られた厳密結果の性質やパラメーター依存性を議論した。本研究でエンタングルメント Rényi エントロピーは Thirring coupling が小さい時に増加し、ある値 λ_{max} を境に減少に転ずることがわかった。また、相互 Rényi 情報量については正定値性を示すことができ、Thirring coupling が十分大きい時に単調増加することがわかった。相互 Rényi 情報量は領域 $V = V_1 \cup V_2$ の 2 つの interval V_1, V_2 の間のエンタングルメントの大きさを表すため、相互作用が大きい場合に相互 Rényi 情報量が増加したことは直感に合った結果であった。

11.2 今後の展望

本研究の応用をいくつか挙げる。

- **領域 V を構成する領域の数を増やす、またはレプリカシートの数を増やす**

本研究では領域 V が 2 つの单連結な領域で構成される場合の 2 シートの ERE(つまり $(n, N) = (2, 2)$) しか扱っていない。より一般の領域 V の構成、シート数で ERE, MRI を求めることは面白い応用だろう。一般に領域 V が n 個の单連結な領域で構成される場合の N シートのレプリカ多様体 $\Sigma_{n,N}$ は共形変換で genus が $(n-1)(N-1)$ 個の Riemann 面に map することができる。また、そのような genus を複数個持つ場合でもボソン/フェルミオン双対性の辞書 (3.85) は成り立つ [20]。この場合、より多くの genus をもった多様体での compact boson の分配関数が必要となるが、そのような分配関数はすでに調べられている [43–45]。今回は $\Sigma_{2,2} \rightarrow \mathbf{T}$ の共形変換を用いたが [40]、より一般の $\Sigma_{n,N}, n \geq 3, N \geq 3$ に対する共形変換を求めることができれば我々の手法をそのまま $n \geq 3, N \geq 3$ の場合に応用することができる。

- **massive Thirring model**

massive Thirring model は sine-Gordon モデルと双対であることが知られている [19]。この場合、CFT ではないため本研究と同じ手法をそのまま使うことはできない(解析の途中で共形変換を使用している)。しかし、mass が小さい場合を考え、摂動論を用いることはできる。mass perturbation によって本研究の補正項を求めるることは面白いだろう。free massive fermion に対しては同じように mass perturbation の議論がなされている [14, 46]。この先行研究も参考になるだろう。

- **他の spin structure を調べる**

本研究ではレプリカ多様体上の分配関数をトーラスの分配関数に書き換えた時、トーラスの spin structure を $\varrho = AA$ とした。これはレプリカ法の境界条件から自然な結果であるが、それ以外の spin structure を考えるのも面白いだろう。トーラス上で spin structure を $\varrho = AA$ から変えることは、レプリカ多様体上で見ると fermion parity 演算子 $(-1)^F : \psi(x) \rightarrow -\psi(x)$ を特定の領域に挿入することを意味する。このように fermion parity 演算子を系に挿入しエンタングルメントを調べている先行研究はすでにある [47, 48]。本研究の手法を用いて massless Thirring model における結果を比較するのは面白いだろう。

- **超対称性のある理論に対するエンタングルメント Rényi エントロピー**

free compact boson はと超対称性が出現する R の値が存在する。一方、超対称性のある理論に対する ERE はすでに先行研究がある [49–51]。我々の手法を超対称性のある理論に対するエンタングルメント Rényi エントロピーに応用することは面白いだろう。

謝辞

この修士論文の執筆にあたりお世話になった方々にお礼を申し上げようと思います。

まず、指導教官の西岡辰磨教授に感謝申し上げます。西岡辰磨氏は僕が M1 の頃から勉強会に付き合って頂き、さらに M1 の 11 月には瀕死状態の自分を学生として受け入れて頂きました。M2 になってからも毎週議論して頂き、研究の方向性を示して下さいました。1 本目の論文を執筆できることや、今こうして修士論文を書けるのも西岡辰磨氏の指導のおかげです。重ねてお礼を申し上げます。

共同研究者である嶋守聰一郎氏にも感謝申し上げます。毎週の議論の時間以外でも嶋守聰一郎氏は僕と何度も議論して下さり、多くのことを教えて頂きました。また、物理以外でもなんでも相談に乗って下さり、精神的な支えになりました。論文の執筆に関しても、初めてで何もわからない自分に丁寧に書き方を教えて頂き、大量の添削をして頂きました。今の自分があるのは嶋守聰一郎氏のおかげです。本当にありがとうございます。

また、普段から色々なことを教えてくださった先輩方、一緒に頑張った同期のみんなに感謝申し上げます。秘書の浅野さん、高尾さんも、小さな変化に気づき温かい言葉を下さいました。ありがとうございます。励みになりました。

最後に、この学生生活を支えて下さった家族に感謝しています。

A mod 2 index と cup 積に関する公式

公式：genus が g 個ある Riemann 面を X_g とおく。 s を \mathbb{Z}_2 gauge 場とする ($s \in H^1(X_g, \mathbb{Z}_2)$) と、以下の公式が成り立つ。

$$\sum_s (-1)^{I[s \cdot \rho]} = 2^g . \quad (\text{A.1})$$

公式： s, t を \mathbb{Z}_2 gauge 場、 \cup をカップ積とする。以下の公式が成り立つ。

$$I[(s+t) \cdot \rho] = I[s \cdot \rho] + I[t \cdot \rho] + I[\rho] + \int s \cup t \quad (\text{A.2})$$

公式：

$$\frac{1}{2^g} \sum_s (-1)^{\int s \cup t} = \begin{cases} 2^g & t = 0 \text{ for all cycles} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

B ϑ 関数と \wp 関数の公式

この付録ではこの修士論文でよく使う Jacobi theta 関数と Weierstrass のペー関数についてまとめる。このセクションでは基本的に公式の導出は行わず、結果だけを述べる。ここに書かれている内容は Yello book[22] と NIST を参考にしている。

まずは Jacobi theta 関数から述べる。定義と公式は以下の通り。

定義： $q = e^{2\pi i \tau}$ とする。Jacobi theta 関数 $\vartheta_j(\tau)$, $j = 2, 3, 4$ と Dedekind eta 関数 $\eta(\tau)$ は以下のように定義されている。

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1} (1 - q^n) , \quad q := e^{2\pi i \tau} , \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(\tau) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} q^{\frac{n^2}{2}} , & \vartheta_3(\tau) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} , \\ \vartheta_4(\tau) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

公式：Jacobi 恒等式

$$\vartheta_3(\tau)^4 - \vartheta_2(\tau)^4 - \vartheta_4(\tau)^4 = 0 . \quad (\text{B.3})$$

公式：Eta 関数と theta 関数の関係式

$$2\eta(\tau)^3 = \vartheta_2(\tau)\vartheta_3(\tau)\vartheta_4(\tau) . \quad (\text{B.4})$$

倍角恒等式

$$\begin{aligned} \vartheta_2(2\tau) &= \left(\frac{\vartheta_3(\tau)^2 - \vartheta_4(\tau)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \vartheta_3(2\tau) &= \left(\frac{\vartheta_3(\tau)^2 + \vartheta_4(\tau)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \vartheta_4(2\tau) &= (\vartheta_3(\tau) \vartheta_4(\tau))^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

半角恒等式

$$\begin{aligned} \vartheta_2\left(\frac{\tau}{2}\right) &= (2\vartheta_2(\tau)\vartheta_3(\tau))^{\frac{1}{2}}, \\ \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}\right) &= (\vartheta_3(\tau)^2 + \vartheta_2(\tau)^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \vartheta_4\left(\frac{\tau}{2}\right) &= (\vartheta_3(\tau)^2 - \vartheta_2(\tau)^2)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

| Half identities は上の Doubling identities から導ける。

modular S 変換性

$$\begin{aligned}\vartheta_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau} \vartheta_4(\tau), \\ \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau} \vartheta_3(\tau), \\ \vartheta_4\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau} \vartheta_2(\tau), \\ \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau} \eta(\tau).\end{aligned}\tag{B.7}$$

漸近系

$$\begin{aligned}\vartheta_2(i\ell) &\sim 2e^{-\frac{\pi\ell}{4}}, \\ \vartheta_3(i\ell) &\sim 1 + 2e^{-\pi\ell}, \quad \text{as } \ell \sim \infty, \\ \vartheta_4(i\ell) &\sim 1 - 2e^{-\pi\ell}.\end{aligned}\tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(i\ell) &\sim \ell^{-1/2}, \\ \vartheta_3(i\ell) &\sim \ell^{-1/2}, \quad \text{as } \ell \sim 0, \\ \vartheta_4(i\ell) &\sim 2\ell^{-1/2} e^{-\frac{\pi}{4\ell}}.\end{aligned}\tag{B.9}$$

$\ell \sim \infty$ の漸近形は ϑ 関数の定義 (B.2) から導ける。 $\ell \sim 0$ の漸近形は Modular properties (B.7) から $\ell \sim \infty$ の漸近形に帰着できる。

C Weierstrass のペー関数

この付録では Weierstrass のペー関数についてまとめる。

定義：Lattice generator を $1, \tau$ とする。この時、weierstrass のペー関数 \wp は以下のように定義される。

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \left[\frac{1}{(z+m+n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} \right].\tag{C.1}$$

$\wp(z)$ の周期性：

$$\wp(z) = \wp(z+1) = \wp(z+\tau) . \quad (\text{C.2})$$

$\wp(z)$ の特別な点の性質：定数 e_1, e_2, e_3 を以下のように定義する。

$$e_1 = \wp(1/2) , \quad e_2 = \wp(\tau/2) , \quad e_3 = \wp((\tau+1)/2) . \quad (\text{C.3})$$

すると、以下のような関係式が成り立つ。

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\pi^2}{3} \left(\vartheta_2^4(\tau) + 2\vartheta_4^4(\tau) \right) , \\ e_2 &= \frac{\pi^2}{3} \left(\vartheta_2^4(\tau) - \vartheta_4^4(\tau) \right) , \\ e_3 &= -\frac{\pi^2}{3} \left(2\vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_4^4(\tau) \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$\wp(z)$ の微分：

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= 4 [\wp(z) - e_1] [\wp(z) - e_2] [\wp(z) - e_3] , \\ \wp''(z) &= 6 \left(\wp(z)^2 + \bar{e} \right) , \\ \wp'''(z) &= 12 \wp(z) \wp'(z) , \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

ここで、 $\bar{e} := (e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)/3$ を用いた。

これより、以下の楕円積分との関係性があることがわかる。

楕円積分との関係：

$$z = \frac{1}{2} \int_{\wp(z)}^{\infty} [(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)]^{-1/2} dt . \quad (\text{C.7})$$

左辺を z 微分して (C.6) を用いると示せる。

References

- [1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895.
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2011.
- [3] A. Kitaev and J. Preskill, *Topological entanglement entropy*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 110404 [[hep-th/0510092](#)].
- [4] M. Levin and X.-G. Wen, *Detecting Topological Order in a Ground State Wave Function*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 110405 [[cond-mat/0510613](#)].
- [5] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico and A. Kitaev, *Entanglement in quantum critical phenomena*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 227902 [[quant-ph/0211074](#)].
- [6] A. R. Its, B.-Q. Jin and V. E. Korepin, *Entanglement in the xy spin chain*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** (2005) 2975.
- [7] S. W. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 191.
- [8] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
- [9] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [[hep-th/9711200](#)].
- [10] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602 [[hep-th/0603001](#)].
- [11] S. Ryu and T. Takayanagi, *Aspects of Holographic Entanglement Entropy*, *JHEP* **08** (2006) 045 [[hep-th/0605073](#)].
- [12] C. Holzhey, F. Larsen and F. Wilczek, *Geometric and renormalized entropy in conformal field theory*, *Nucl. Phys. B* **424** (1994) 443 [[hep-th/9403108](#)].
- [13] P. Calabrese and J. L. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, *J. Stat. Mech.* **0406** (2004) P06002 [[hep-th/0405152](#)].
- [14] H. Casini, C. D. Fosco and M. Huerta, *Entanglement and alpha entropies for a massive Dirac field in two dimensions*, *J. Stat. Mech.* **0507** (2005) P07007 [[cond-mat/0505563](#)].
- [15] I. R. Klebanov, S. S. Pufu, S. Sachdev and B. R. Safdi, *Rényi Entropies for Free Field Theories*, *JHEP* **04** (2012) 074 [[1111.6290](#)].
- [16] P. Calabrese, J. Cardy and E. Tonni, *Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory*, *J. Stat. Mech.* **0911** (2009) P11001 [[0905.2069](#)].
- [17] P. Calabrese, J. Cardy and E. Tonni, *Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory II*, *J. Stat. Mech.* **1101** (2011) P01021 [[1011.5482](#)].
- [18] M. Headrick, *Entanglement Rényi entropies in holographic theories*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 126010 [[1006.0047](#)].
- [19] S. R. Coleman, *The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model*, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 2088.

- [20] A. Karch, D. Tong and C. Turner, *A Web of 2d Dualities: \mathbf{Z}_2 Gauge Fields and Arf Invariants*, *SciPost Phys.* **7** (2019) 007 [[1902.05550](#)].
- [21] W. Ji, S.-H. Shao and X.-G. Wen, *Topological Transition on the Conformal Manifold*, *Phys. Rev. Res.* **2** (2020) 033317 [[1909.01425](#)].
- [22] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1997, [10.1007/978-1-4612-2256-9](#).
- [23] P. H. Ginsparg, *APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY*, in *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena*, 9, 1988, [hep-th/9108028](#).
- [24] 犀川 泰章, **共形場理論入門 基礎からホログラフィへの道**. 講談社, 2022.
- [25] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1998.
- [26] W. E. Thirring, *A Soluble relativistic field theory?*, *Annals Phys.* **3** (1958) 91.
- [27] 松 宏明, **量子系のエンタングルメントと幾何学 ホログラフィー原理に基づく異分野 橫断の数理**. 森北出版株式会社, 2016.
- [28] S. Kullback and R. A. Leibler, *On information and sufficiency*, *The Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 79.
- [29] Y. Nakaguchi and T. Nishioka, *A holographic proof of Rényi entropic inequalities*, *JHEP* **12** (2016) 129 [[1606.08443](#)].
- [30] H. Casini and M. Huerta, *Entanglement entropy in free quantum field theory*, *J. Phys. A* **42** (2009) 504007 [[0905.2562](#)].
- [31] T. Nishioka, *Entanglement entropy: holography and renormalization group*, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018) 035007 [[1801.10352](#)].
- [32] J. L. Cardy, O. A. Castro-Alvaredo and B. Doyon, *Form factors of branch-point twist fields in quantum integrable models and entanglement entropy*, *J. Statist. Phys.* **130** (2008) 129 [[0706.3384](#)].
- [33] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and conformal field theory*, *J. Phys. A* **42** (2009) 504005 [[0905.4013](#)].
- [34] V. G. Knizhnik, *Analytic Fields on Riemann Surfaces. 2*, *Commun. Math. Phys.* **112** (1987) 567.
- [35] T. Takayanagi and T. Tsuda, *Free fermion cyclic/symmetric orbifold CFTs and entanglement entropy*, *JHEP* **12** (2022) 004 [[2209.00206](#)].
- [36] H.-S. Jeong, K.-Y. Kim and M. Nishida, *Entanglement and Rényi entropy of multiple intervals in $T\bar{T}$ -deformed CFT and holography*, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 106015 [[1906.03894](#)].
- [37] Y. Sun and J.-R. Sun, *Note on the Rényi entropy of 2D perturbed fermions*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 106008 [[1901.08796](#)].
- [38] K. Ohmori and Y. Tachikawa, *Physics at the entangling surface*, *J. Stat. Mech.* **1504** (2015) P04010 [[1406.4167](#)].
- [39] L. J. Dixon, D. Friedan, E. J. Martinec and S. H. Shenker, *The Conformal Field Theory of Orbifolds*, *Nucl. Phys. B* **282** (1987) 13.

- [40] O. Lunin and S. D. Mathur, *Correlation functions for M^N/S_N orbifolds*, *Commun. Math. Phys.* **219** (2001) 399 [[hep-th/0006196](#)].
- [41] C. Yin and Z. Liu, *Universal entanglement and correlation measure in two-dimensional conformal field theories*, *Phys. Rev. Lett.* **130** (2023) 131601.
- [42] X. Dong, *The Gravity Dual of Renyi Entropy*, *Nature Commun.* **7** (2016) 12472 [[1601.06788](#)].
- [43] L. Alvarez-Gaume, G. W. Moore and C. Vafa, *Theta Functions, Modular Invariance and Strings*, *Commun. Math. Phys.* **106** (1986) 1.
- [44] L. Alvarez-Gaume, J. B. Bost, G. W. Moore, P. C. Nelson and C. Vafa, *Bosonization on Higher Genus Riemann Surfaces*, *Commun. Math. Phys.* **112** (1987) 503.
- [45] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, *$C = 1$ Conformal Field Theories on Riemann Surfaces*, *Commun. Math. Phys.* **115** (1988) 649.
- [46] C. P. Herzog and T. Nishioka, *Entanglement Entropy of a Massive Fermion on a Torus*, *JHEP* **03** (2013) 077 [[1301.0336](#)].
- [47] M. Fagotti and P. Calabrese, *Entanglement entropy of two disjoint blocks in XY chains*, *J. Stat. Mech.* **1004** (2010) P04016 [[1003.1110](#)].
- [48] A. Coser, E. Tonni and P. Calabrese, *Spin structures and entanglement of two disjoint intervals in conformal field theories*, *J. Stat. Mech.* **1605** (2016) 053109 [[1511.08328](#)].
- [49] T. Nishioka and I. Yaakov, *Supersymmetric Rényi Entropy*, *JHEP* **10** (2013) 155 [[1306.2958](#)].
- [50] A. Giveon and D. Kutasov, *Supersymmetric Rényi entropy in CFT_2 and AdS_3* , *JHEP* **01** (2016) 042 [[1510.08872](#)].
- [51] H. Mori, *Supersymmetric Rényi entropy in two dimensions*, *JHEP* **03** (2016) 058 [[1512.02829](#)].