

# 量子計算を用いたSchwinger模型における 量子Mpemba効果のシミュレーション

---



藤村晴伸

大阪大学 素粒子論研究室

2026/9/16 10:15-10:30

共同研究者：藤井啓介、本多正純、Duc Le Truyen

論文執筆中



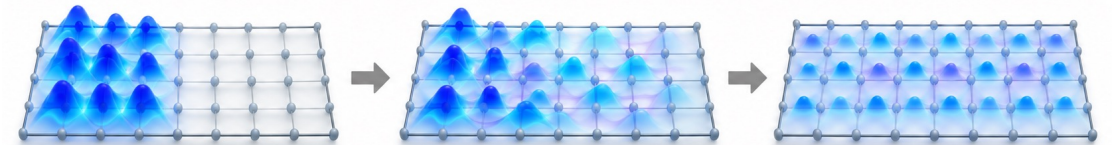
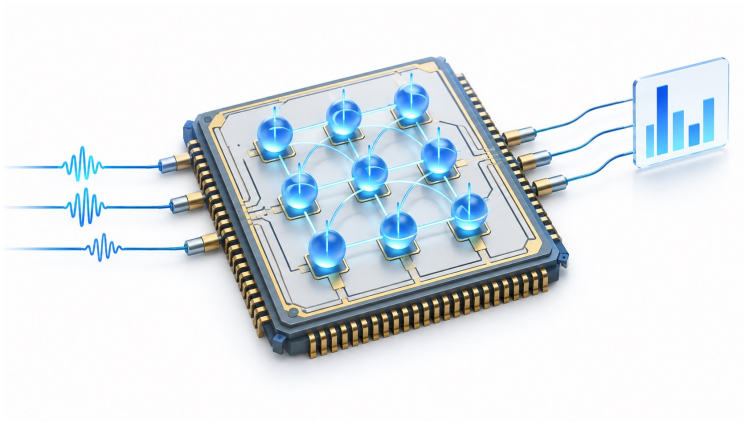
[My HP](#)

本発表の内容：

量子計算

応用

非平衡緩和現象



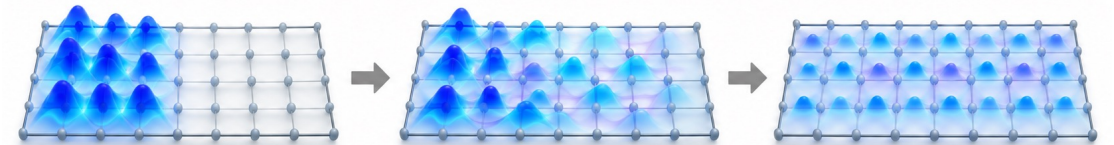
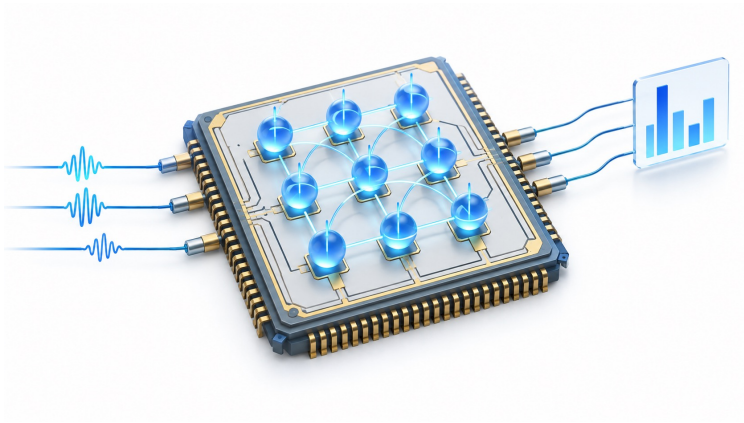
(図はChat GPTで生成)

本発表の内容：

量子計算

応用

量子Mpemba効果



(図はChat GPTで生成)

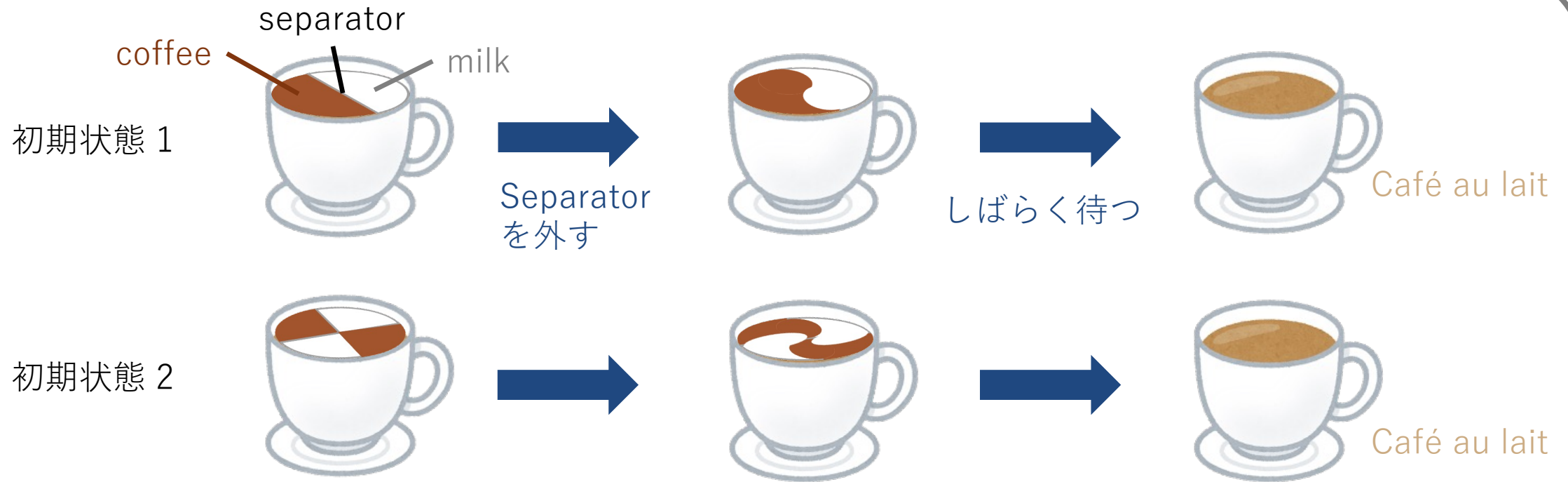
Mpemba効果：異常な非平衡緩和現象 [E B Mpemba and D G Osborn, 1969]

## Metaphor



Mpemba効果：異常な非平衡緩和現象 [E B Mpemba and D G Osborn, 1969]

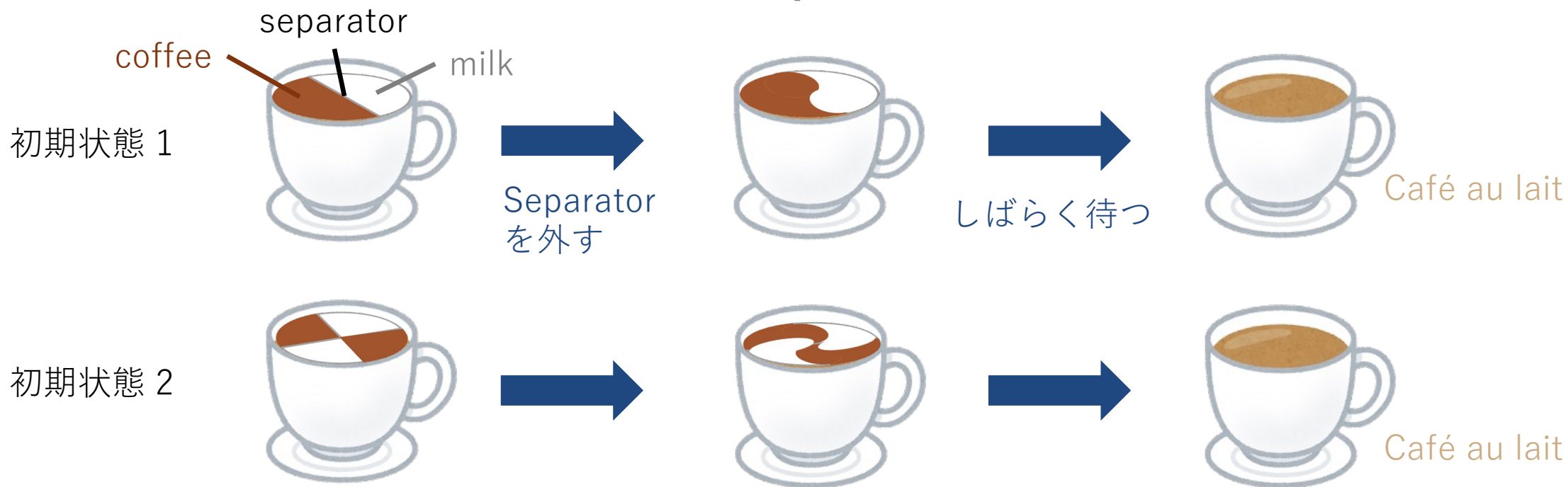
## Metaphor



直感的には初期状態2の方が早く混ざると予想できる。

Mpemba効果：異常な非平衡緩和現象 [E B Mpemba and D G Osborn, 1969]

## Metaphor



直感的には初期状態2の方が早く混ざると予想できる。

しかし、特定の条件下では初期状態1の方が早く混ざることがある！

➡ 直感に反する緩和現象！

Mpemba効果：異常な非平衡緩和現象 [E B Mpemba and D G Osborn, 1969]

量子系では…



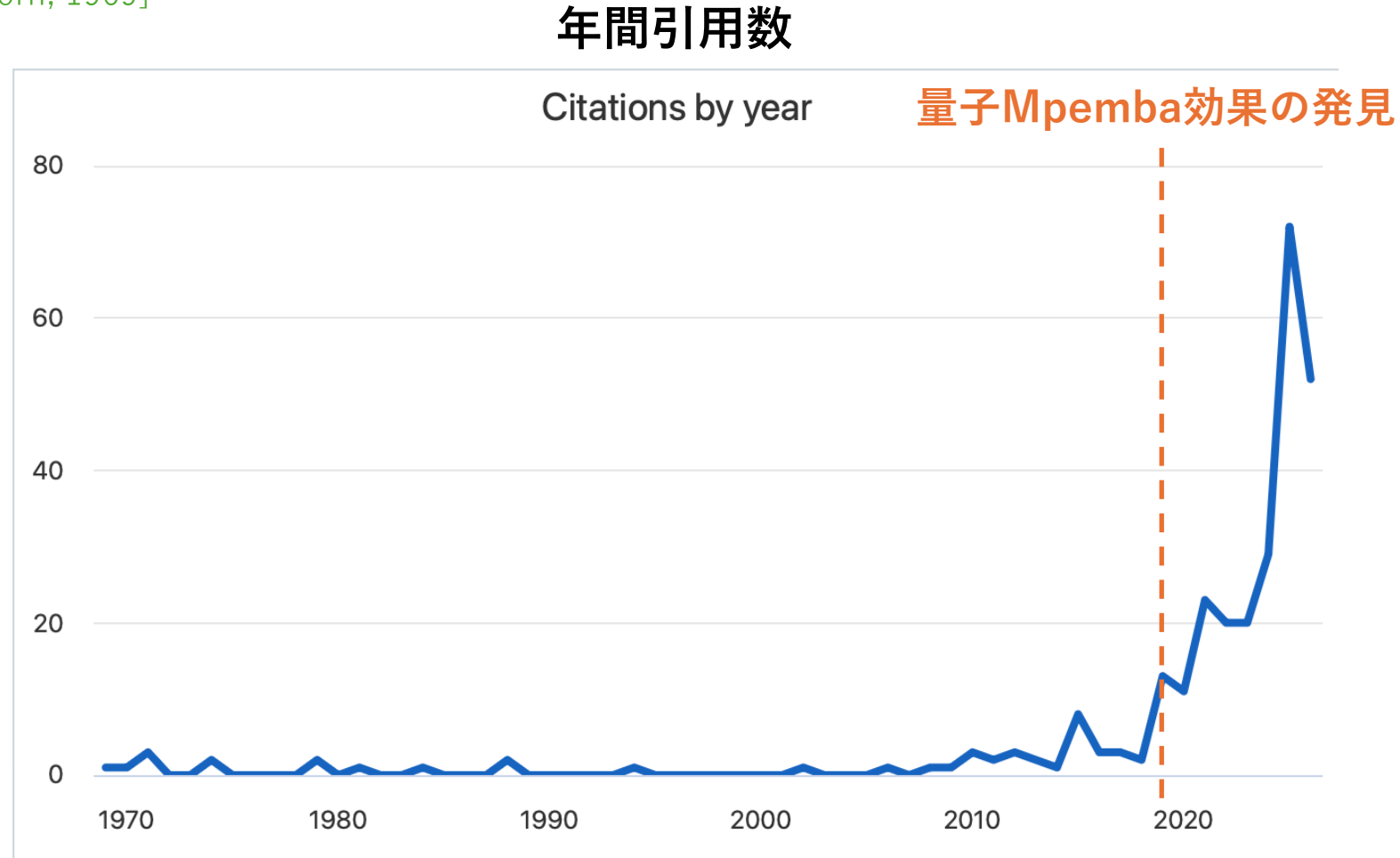
量子Mpemba効果

初期状態の対称性の破れが大きいほど、対称性が早く回復する現象。

# 導入

Mpemba効果は初め古典系で発見されたが、最近になって量子系でも起こることがわかった。

[E B Mpemba and D G Osborn, 1969]



量子Mpemba効果の研究は近年急激に発達している。

## なぜ、量子Mpemba効果が研究されるのか？

(個人の見解を含む)

### 理学的

- **非平衡緩和の速さは何によって決まるのか？**という学術的な興味。  
初期状態の非平衡性と緩和速度の関係を理解する。
- **対称性の破れの”大きさ”を導入することで、量子系への理解が深まる。**  
従来のオーダーパラメーターを用いずに、密度行列から対称性を定量化する。

## なぜ、量子Mpemba効果が研究されるのか？

(個人の見解を含む)

理学的

- 非平衡緩和の速さは何によって決まるのか？という学術的な興味。  
初期状態の非平衡性と緩和速度の関係を理解する。
- 対称性の破れの”大きさ”を導入することで、量子系への理解が深まる。  
従来のオーダーパラメーターを用いずに、密度行列から対称性を定量化する。

工学的

- 遅い緩和を回避し、高速な状態準備に応用できる。  
初期状態の選び方にヒントを与える。



量子Mpemba効果は理学的にも工学的にも面白い現象。

## なぜ、量子Mpemba効果が研究されるのか？

(個人の見解を含む)

### 理学的

- 非平衡緩和の速さは何によって決まるのか？という学術的な興味。  
初期状態の非平衡性と緩和速度の関係を理解する。
- 対称性の破れの”大きさ”を導入することで、量子系への理解が深まる。  
従来のオーダーパラメーターを用いずに、密度行列から対称性を定量化する。

### 工学的

- 遅い緩和を回避し、高速な状態準備に応用できる。  
初期状態の選び方にヒントを与える。

どうやって？



量子Mpemba効果は理学的にも工学的にも面白い現象。

# 導入

理論にある対称性があり、保存電荷が以下のように分けられる場合を考える。

$$Q = Q_A + Q_B$$

$A$  = 注目する部分系

$B$  = 環境系

$Q_A$ の固有ベクトルによる密度行列の行列表示

対称性の破れた状態

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} & * & * \\ * & \boxed{\phantom{0}} & * \\ * & * & \boxed{\phantom{0}} \end{pmatrix}$$

非対角成分

対称性のある状態

$$\rho_{A,S} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} & & \\ & \boxed{\phantom{0}} & \\ & & \boxed{\phantom{0}} \end{pmatrix}$$

ブロック対角行列

# 導入

理論にある対称性があり、保存電荷が以下のように分けられる場合を考える。

$$Q = Q_A + Q_B$$

$A$  = 注目する部分系

$B$  = 環境系

$Q_A$ の固有ベクトルによる密度行列の行列表示

対称性の破れた状態

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ * & \blacksquare & * \\ * & * & \blacksquare \end{pmatrix}$$

非対角成分

対称性のある状態

$$\rho_{A,S} = \begin{pmatrix} \blacksquare & & \\ & \blacksquare & \\ & & \blacksquare \end{pmatrix}$$

ブロック対角行列

**Entanglement Asymmetry=対称性の破れの大きさの定量化**

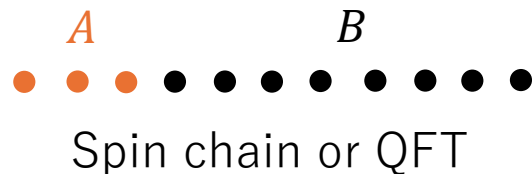
[Ares-Murciano-Calabrese, 2022]

$$\Delta S_A \equiv \Delta S(\rho_A | \rho_{A,S}) = \text{Tr}_A [\rho_A (\log \rho_A - \log \rho_{A,S})]$$

Relative entropy

量子Mpemba効果を調べる典型的方法：

## 対称性のあるHamiltonianによるクエンチ



全体系= $A \cup B$

$A$ :注目する部分系

**STEP1:** 対称性が**explicit**に破れた状態 $|\psi_{AB}(0)\rangle$ を用意する。

**STEP2:** 対称性のあるHamiltonianによって実時間発展をさせる。

$$|\psi_{AB}(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi_{AB}(0)\rangle$$

**STEP3:** 各時間 $t$ でEntanglement Asymmetryを計算する。

$$\Delta S_A(t)$$

この方法によって、量子Mpemba効果は物性、素粒子、量子情報といった多岐にわたる分野で研究されている。

しかし、まだまだ課題はある…

## 問題点

- ・ 可積分系や共形場理論といった特別なモデル以外では解析が困難。
- ・ 古典コンピュータによる数値計算のコスト:  $\mathcal{O}(2^{2N_A})$  → **指数的なコスト**  
 $N_A$ : 部分系Aのサイズ
- ・ モンテカルロ法: 符号問題があり使えない。

しかし、まだまだ課題はある…

## 問題点

- ・ 可積分系や共形場理論といった特別なモデル以外では解析が困難。
- ・ 古典コンピュータによる数値計算のコスト:  $\mathcal{O}(2^{2N_A})$  → **指数的なコスト**  
 $N_A$ : 部分系Aのサイズ
- ・ モンテカルロ法: 符号問題があり使えない。

場の量子論のような自由度の多い量子系では解析が非常に困難。

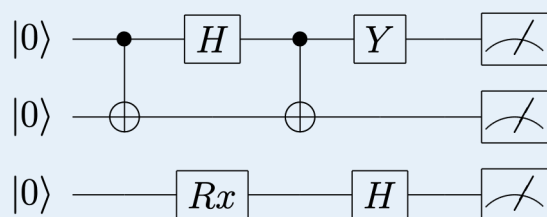


**Entanglement Asymmetry**を計算する新しい手法が必要。

## 本研究のショートサマリー

- 本研究では、量子計算を用いてEntanglement Asymmetryを解析する量子アルゴリズムを考案した。
- 考案した量子アルゴリズムは場の量子論のような自由度の多い系にも適応可能。
- 応用例として、格子上のSchwinger模型を扱った。
- 場の量子論で量子Mpemba効果を解析できることを示した。

### 量子計算



Simulation



### Entanglement Asymmetry

$$\Delta S_A(t)$$

量子Mpemba効果の解析

# 本研究の内容

---

# 本研究の内容

## 我々のアイデア

- 二つの状態の間の相関 $\text{Tr}[\rho_A \rho_{A,S}]$ は**SWAP test**を用いれば測定できる。
- 電荷 $Q_A$ の測定を行えば対称的な状態 $\rho_{A,S}$ を実現できる (decoherence)。  
今回は**量子位相推定(QPE)**から $Q_A$ を測定する。

### Symmetry-broken state

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ * & \blacksquare & * \\ * & * & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Off-diagonal

$Q_A$ の固有状態による行列表示

decoherence



$e^{iQ_A}$ に対する  
量子位相推定

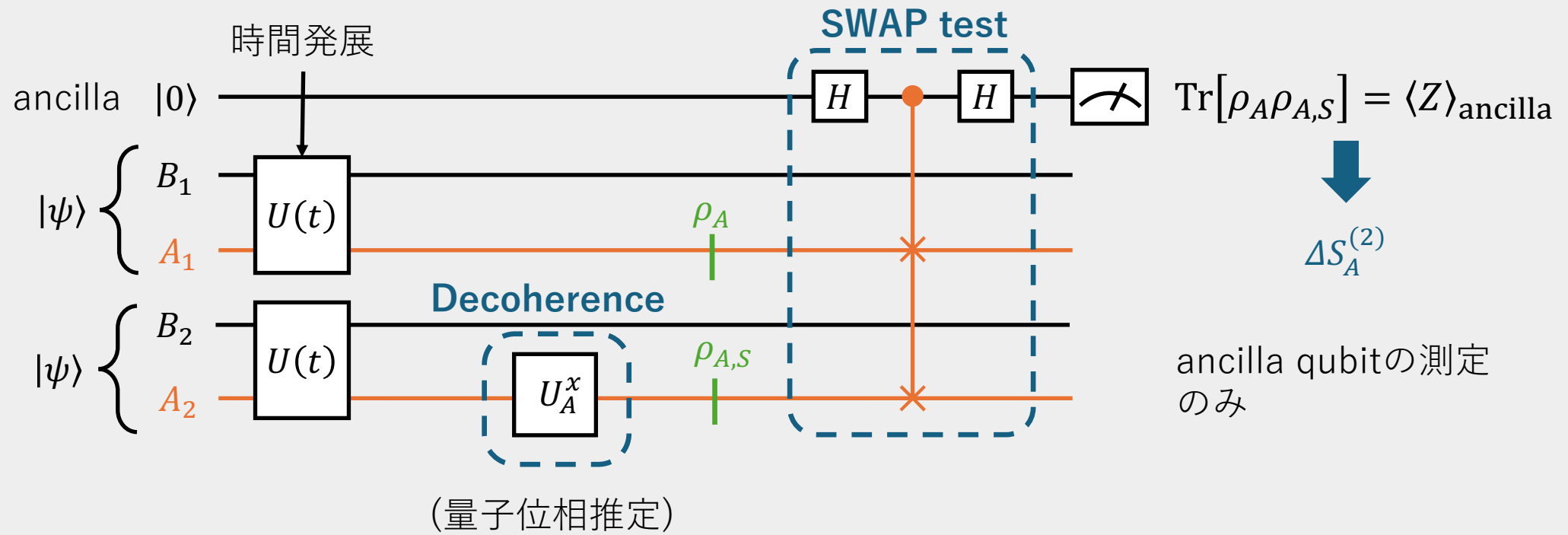
### Symmetric state

$$\rho_{A,S} = \begin{pmatrix} \blacksquare & & \\ & \blacksquare & \\ & & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Block diagonal

# 本研究の内容

## 本研究で考案した量子回路



量子位相推定とSWAP testを組み合わせ、Entanglement Asymmetryを推定するアルゴリズムを考案した。

# 本研究の内容

## 本研究の計算コスト

量子計算には二つの計算コストがある：ゲート数と測定回数

### ゲート数

- ・ (実時間発展に必要なゲート数)  $\leq \mathcal{O}(N^{4+1/p} t^{1+1/p} \epsilon^{-1/p})$  [A. M. Childs et al, 2021]

$N$  : 全体系のサイズ、 $t$  : 実時間

$\epsilon$  : 許容する時間発展の誤差、 $p$  : Trotterizationの次数

- ・ (decoherence、SWAP testに必要なゲート数)  $= \mathcal{O}(N_A) \ll \mathcal{O}(N^\#)$  :ほとんど無視できる。

### 測定回数

$\text{Tr}[\rho_A \rho_{A,S}]$ を統計誤差 $\delta$ で推定するために必要な測定回数：

$$N_{\text{shot}} = \mathcal{O}(\delta^{-2}) \quad \text{系の大きさに依らない。}$$

本研究の手法は場の量子論のような自由度の大きい系にも適用可能。

# 本研究の内容

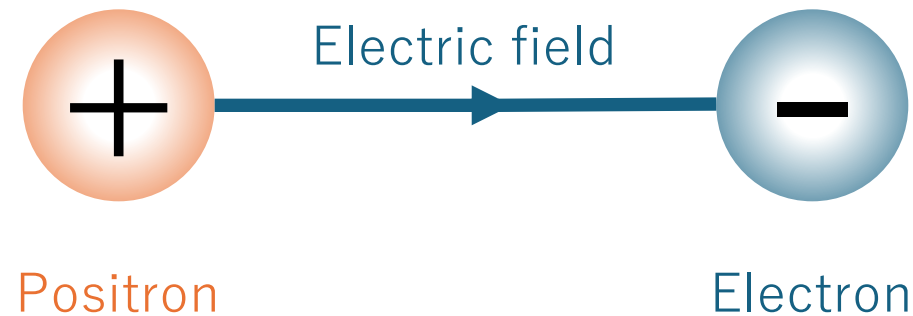
## 応用例のデモ

Schwinger模型(連続時空上) [Schwinger, 1962]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi - m\bar{\psi}e^{i\theta\gamma^5}\psi$$

||

(1+1)次元量子電磁気学



# 本研究の内容

## 応用例のデモ

Schwinger模型(連続時空上) [Schwinger, 1962]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi - m\bar{\psi}e^{i\theta\gamma^5}\psi$$

Temporal gauge  $A_0 = 0$

Kogut-Susskind formalism



Open boundary condition

Gauss law constraint

Jordan-Wigner transformation

格子Schwinger模型(スピン系) [Masazumi Honda et al, 2022]

$$H = H_{ZZ} + H_{\pm} + H_Z$$

$$H_{ZZ} \sim \sum_n \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} Z_k Z_\ell, \quad H_{XY} \sim \sum_n (X_n X_{n+1} + Y_n Y_{n+1}), \quad H_Z = \sum_n Z_n$$

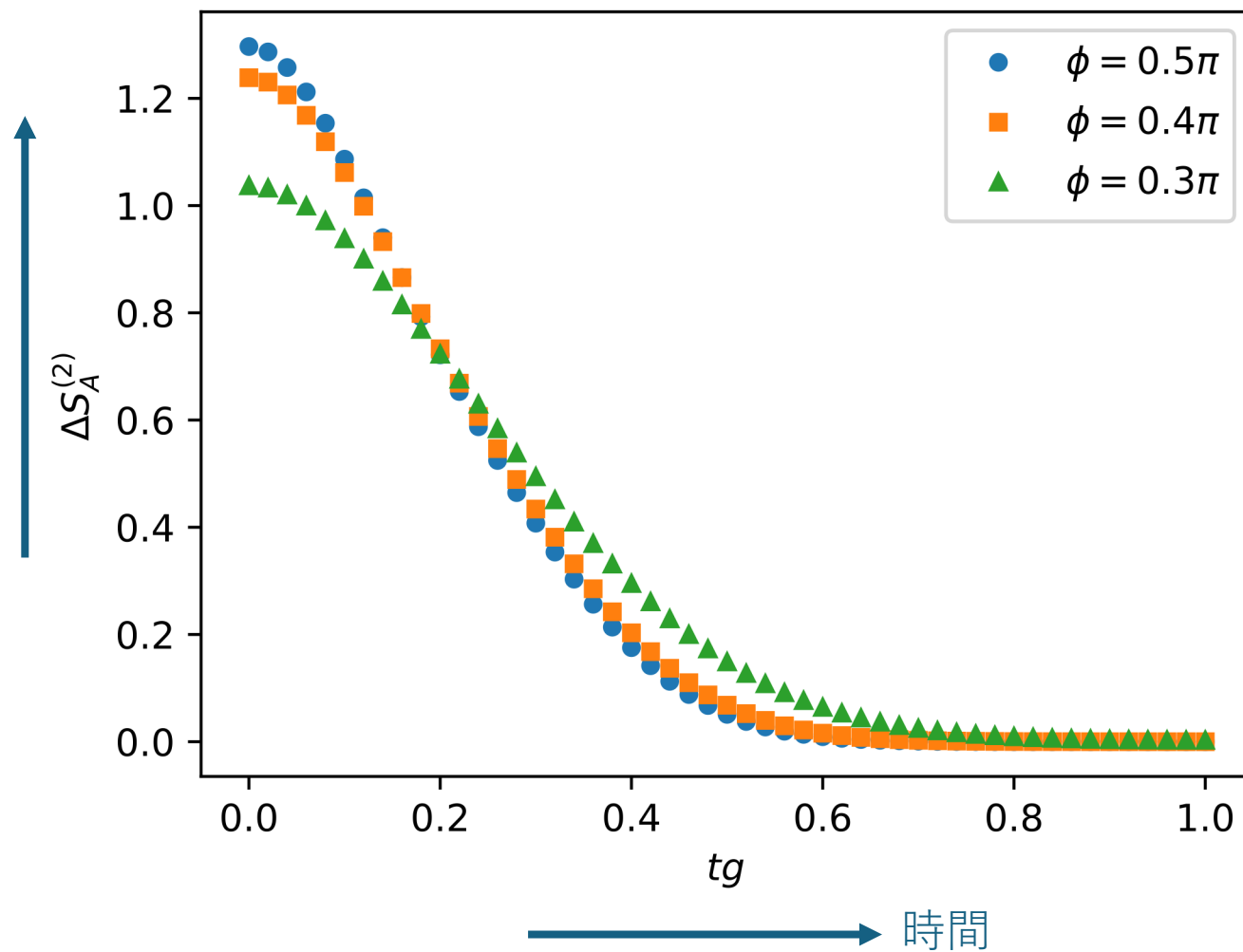
$X_n, Y_n, Z_n$  : Pauli matrices on the  $n$ -th site.

このHamiltonianによる実時間発展を2次のTrotterizationで実装した(Qulacsを使用)。

# 本研究の内容

## 本研究の結果の例:

対称性の破れの  
大きさ



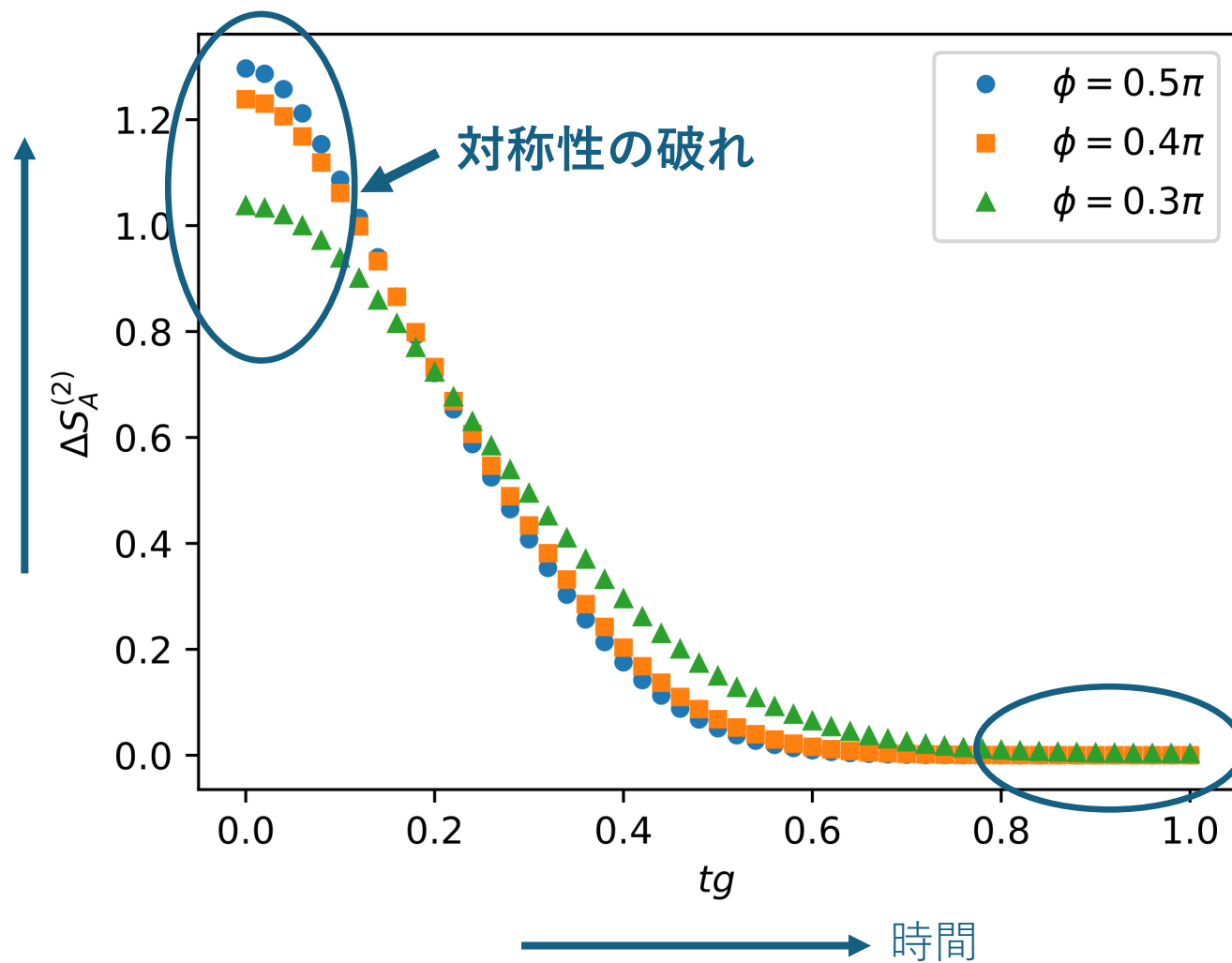
### parameters

$N = 18, N_A = 4$   
 $m/g = 4, \theta = \pi/3$   
 $ag = 0.25, \delta t = 0.02$   
(# of Trotter step) = 50

# 本研究の内容

## 本研究の結果の例:

対称性の破れの  
大きさ



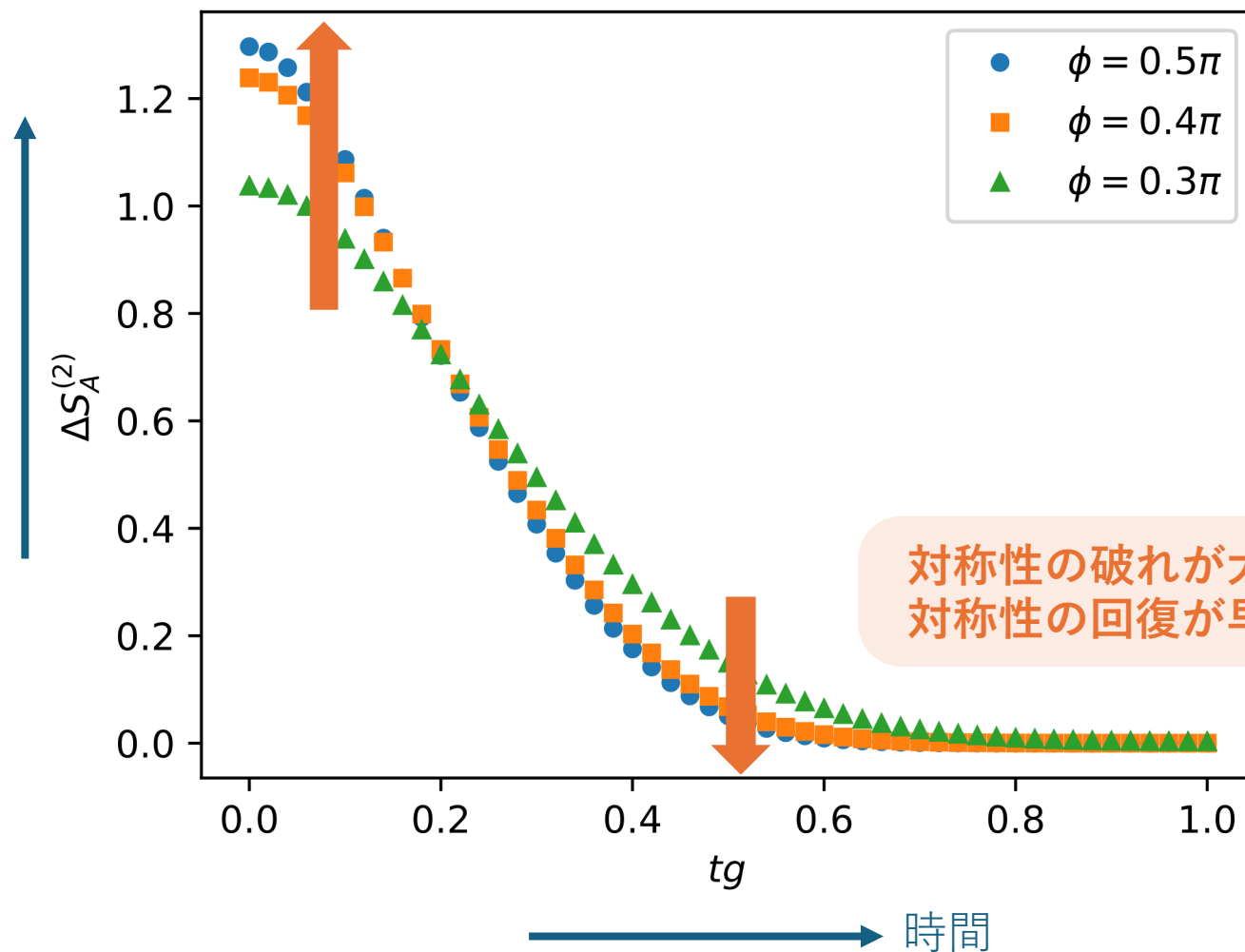
parameters

$N = 18, N_A = 4$   
 $m/g = 4, \theta = \pi/3$   
 $ag = 0.25, \delta t = 0.03$   
(# of Trotter step) = 50

# 本研究の内容

## 本研究の結果の例:

対称性の破れの  
大きさ



parameters

$N = 18, N_A = 4$   
 $m/g = 4, \theta = \pi/3$   
 $ag = 0.25, \delta t = 0.03$   
(# of Trotter step) = 50

本研究の手法によって格子Schwinger模型における量子Mpemba効果を調べられることを示した。

## まとめ

- 量子Mpemba効果は異常な非平衡緩和現象の一つ。
- 本研究ではEntanglement Asymmetryを推定する量子アルゴリズムを考案した。
- 必要なゲートコストは多項式でスケールし、**測定回数は系のサイズに依らない**。  
→場の量子論の解析に最適。
- 応用例として格子Schwinger modelを扱い、量子Mpemba効果を調べられることを示した。

## 時間の都合上紹介できなかった内容

- 本研究の量子アルゴリズムの詳細、導出。
- Schwinger modelにおける具体的な問題設定。
- より具体的なリソース推定(NISQ, early-FTQCにおける実装可能性など)。

# Appendix

---

# Appendix: シミュレーションのセットアップ

## Schwinger model as a spin model

$$H = H_{ZZ} + H_{\pm} + H_Z$$

$$H_{ZZ} = \frac{J}{2} \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} Z_k Z_{\ell} , \quad H_{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left( w - (-1)^n \frac{m}{2} \sin \theta \right) (X_n X_{n+1} + Y_n Y_{n+1})$$

$$H_Z = \frac{m \cos \theta}{2} \sum_{n=1}^N (-1)^n Z_n - \frac{J}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (n \bmod 2) \sum_{\ell}^n Z_{\ell} , \quad J = \frac{g^2 a}{2}, w = \frac{1}{2a}, a : \text{lattice spacing}$$

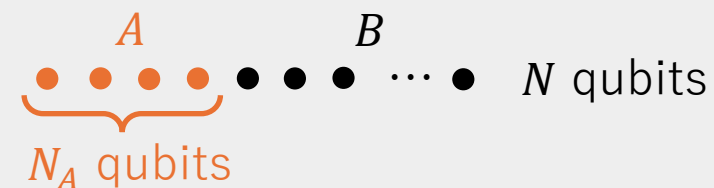
# Appendix: シミュレーションのセットアップ

## Setupの詳細:

### Symmetry

$$U(1) \text{ symmetry, } Q = \frac{1}{2} \sum_n Z_n$$

### Configuration of subsystem



シミュレーションの流れ:

**STEP1:** 以下の初期状態を準備する。

$$|\phi\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2} \sum_n Y_n} |\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle, \quad \phi: \text{初期対称性の破れのパラメーター.}$$

**STEP2:** Trotterization (second order)によって時間発展を実行

$$H = H_{ZZ} + H_{XY} + H_Z, \quad H_{XY} = H_{XY,\text{even}} + H_{XY,\text{odd}}$$

**STEP3:** 本研究の量子回路で推定される  $\Delta S_A^{(2)}(t)$  を計算。

以上の手続きを古典コンピューター上で実行した(Qulacsを使用)

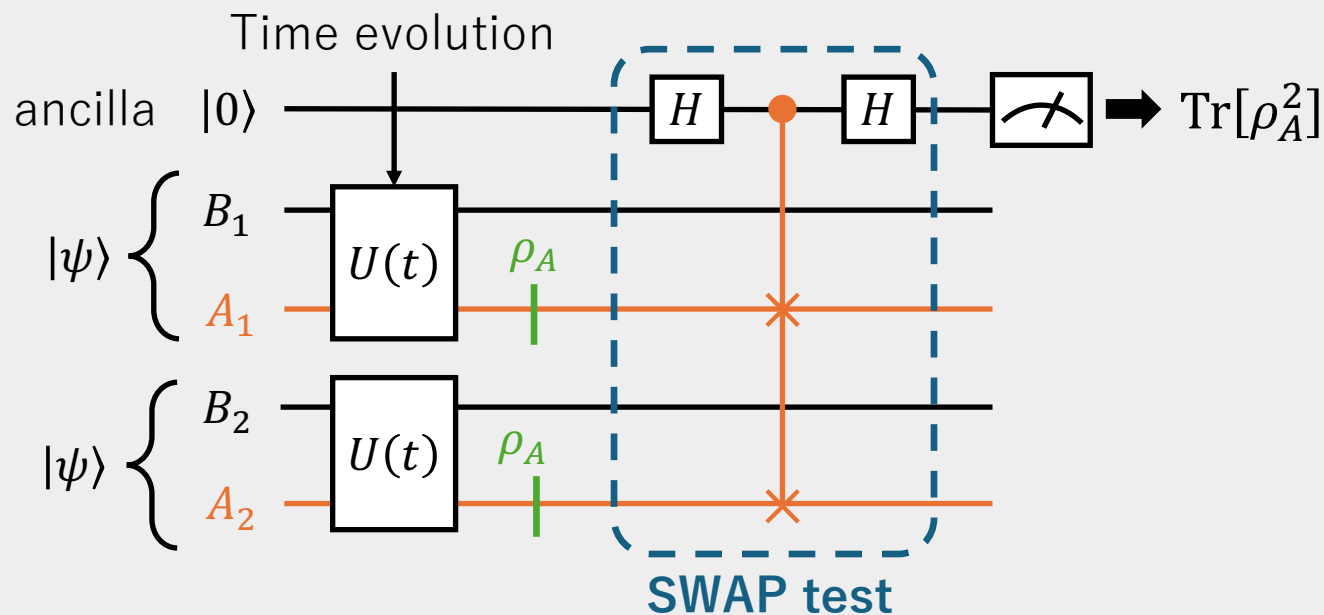
# Appendix: derivation of our algorithm

To simplify the analysis, we focus on the Rényi entanglement asymmetry:

$$\Delta S_A^{(n)} \equiv \frac{1}{n-1} \left( \log \text{Tr}_A[\rho_A^n] - \log \text{Tr}_A[\rho_{A,S}^n] \right), \quad \lim_{n \rightarrow 1} \Delta S_A^{(n)} = \Delta S_A$$

For concreteness, we consider  $n = 2$ .

## Quantum circuit for computing $\text{Tr}_A[\rho_A^2]$



How can we compute  $\text{Tr}_A[\rho_{A,S}^2]$ ?  
(Our work)

# Appendix: derivation of our algorithm

Decoherence: the loss of quantum coherence due to interactions with environment.

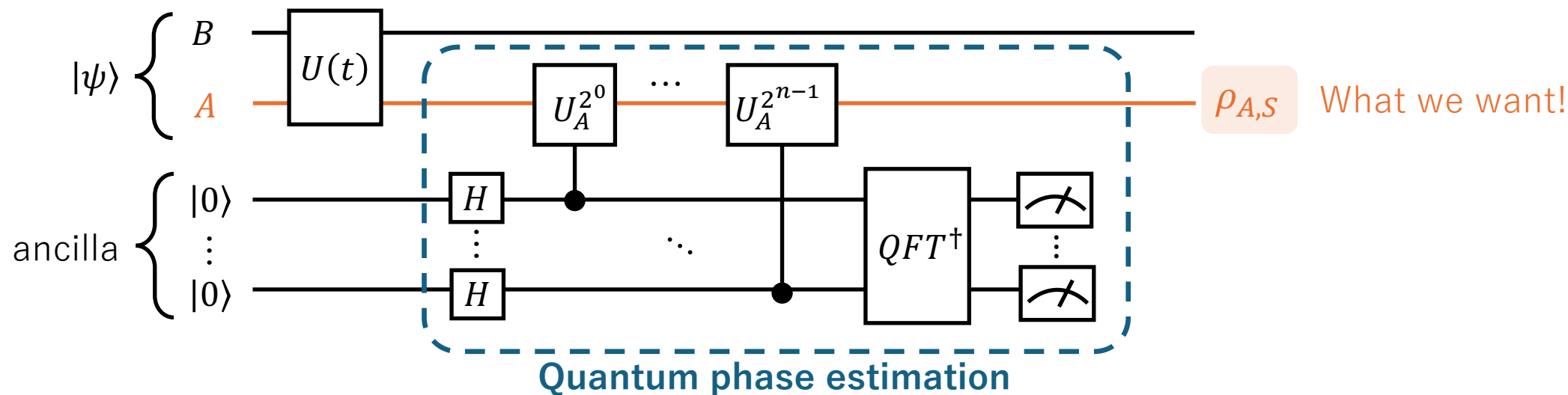
$$\rho_A = \begin{pmatrix} \square & * & * \\ * & \square & * \\ * & * & \square \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Treat this as a decoherence.}} \rho_{A,S} = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{pmatrix}, \text{ in eigen basis of } Q_A$$

# Appendix: derivation of our algorithm

Decoherence: the loss of quantum coherence due to interactions with environment.

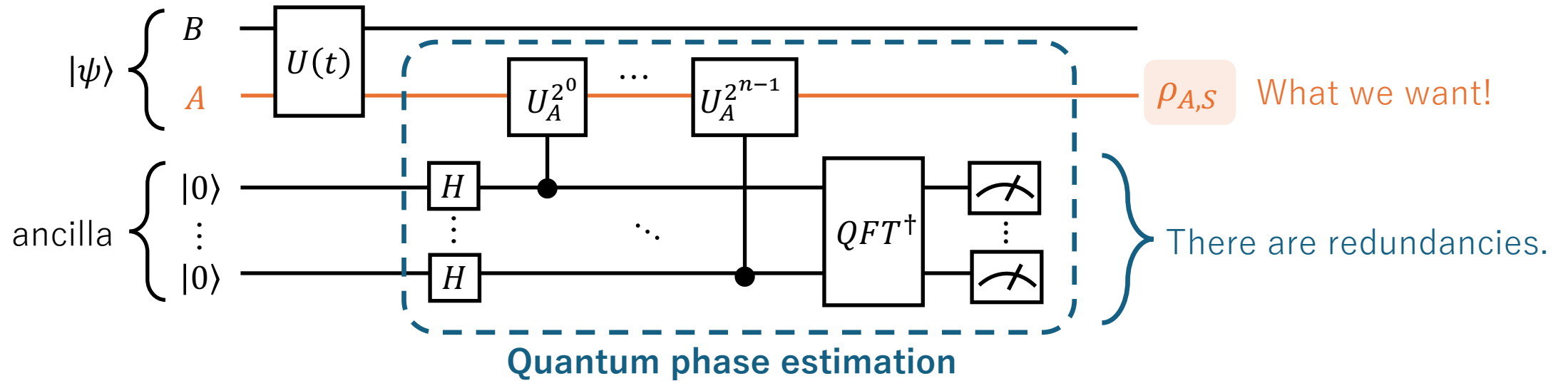
$$\rho_A = \begin{pmatrix} \square & * & * \\ * & \square & * \\ * & * & \square \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Treat this as a decoherence.}} \rho_{A,S} = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{pmatrix}, \text{ in eigen basis of } Q_A$$

We implement this decoherence by employing a **quantum phase estimation** of  $U_A = e^{2\pi i Q_A/2^n}$ ,  $n > \log_2 N_A$



$\rho_{A,S}$  can be prepared in a quantum circuit!

# Appendix: derivation of our algorithm



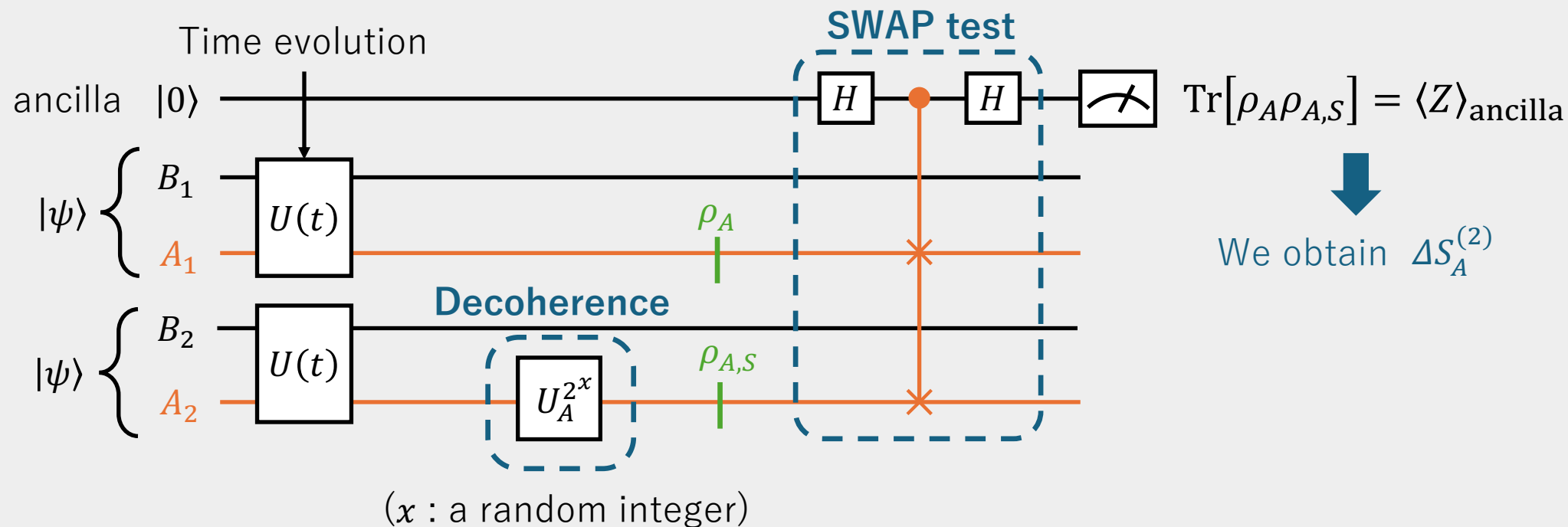
↓ simplify



We can drastically simplify the quantum circuit.

# Appendix: derivation of our algorithm

## Overview of our quantum circuit



By combining the idea of quantum phase estimation with SWAP test, we can estimate the Rényi Entanglement Asymmetry.

# Appendix: resource estimation (gate scaling)

