日本物理学会2025秋@広島大学

Wess-Zumino-Witten modelにおける entanglement asymmetryの解析

藤村晴伸

共同研究者：嶋守聡一郎

大阪大学素粒子論研究室

2025/9/17 13:30~13:45

arXiv: 2509.05597v2

1. Introduction

本発表のトピック：

量子情報理論 → 応用 → **対称性の破れとその回復**

Take home message :

量子情報的な観点を用いることで、対称性の破れとその回復に対する新たな側面を見ることができる。

1. Introduction

Conventionalな方法 ： order parameter $\langle \mathcal{O} \rangle$ を計算する。

$$\langle \mathcal{O} \rangle \begin{cases} = 0 : \text{対称性がある} \\ \neq 0 : \text{対称性が破れている} \end{cases}$$

量子情報的な方法 ：相対エントロピー ΔSを用いる。

Entanglement asymmetry

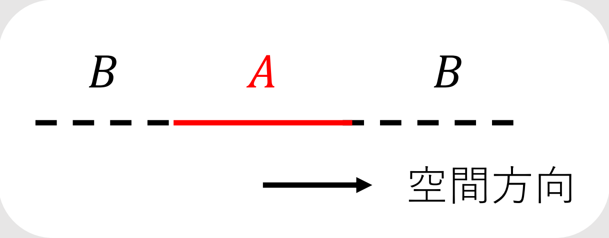
[Ares-Murciano-Calabrese, 2022]

メリット
- 対称性の破れの大きさを定量化できる。
- 非平衡状態に対しても自然に使える。
- 量子Mpembe効果という物理現象を見ることができる(後述)

1. Introduction

非平衡状態が現れる状況として以下を考える：

対称性のあるHamiltonianによるクエンチ



全体系=$A\cup B$，A：注目している系

$|\psi_{AB}(0)\rangle$：対称性がexplicitに破れた状態

$|\psi_{AB}(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi_{AB}(0)\rangle,\ H$：対称性のあるHamiltonian

部分系Aだけに注目すれば、時間発展によって対称性が回復する。

1. Introduction

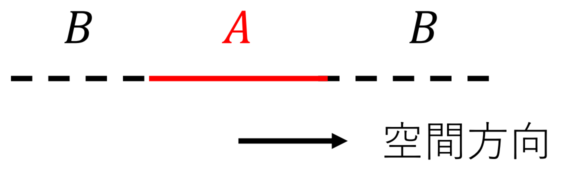
非平衡状態が現れる状況として以下を考える：

対称性のあるHamiltonianによるクエンチ

全体系=$A \cup B$，A：注目している系

$|\psi_{AB}(0)\rangle$: 対称性がexplicitに破れた状態

$|\psi_{AB}(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi_{AB}(0)\rangle$, H：対称性のあるHamiltonian



部分系Aだけに注目すれば、時間発展によって対称性が回復する。

量子情報的な方法により、以下の現象が見つかった。

量子Mpemba(ムペンバ)効果 … 対称性の破れが**大きい**状態ほど、対称性の回復が**早く**なる現象

[Mpemba-Osborn, 1969] [Ares-Murciano-Calabrese, 2022]

直感に反する現象：e.g. “熱いコーヒーがぬるいコーヒーよりも早く冷める”

1. Introduction

量子情報的な方法 [Ares-Murciano-Calabrese, 2022]

仮定

- 理論に対称性Gがある
- Hilbert空間のテンソル積構造: $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$U_{tot}(g) = U_A(g) \otimes U_B(g),\quad g \in G$$

:symmetry operatorのテンソル積構造

Entanglement Asymmetry (EA): 部分系における対称性の破れを定量化する量

$$\Delta S_A \equiv \underbrace{\Delta S(\rho_A | \rho_{A,G})}_{\text{相対エントロピー}} = \mathrm{Tr}_A\left[\rho_A\left(\log \rho_A - \log \rho_{A,G}\right)\right]$$

ρ_A: 注目している系Aの密度行列(一般には対称性を持たない)

$$\rho_{A,G} \equiv \underbrace{\int_G \mathrm{d}g}_{\text{Haar積分}}\, U_A(g)\rho_A U_A^\dagger(g)$$

: 対称化された密度行列

1. Introduction

EAの重要な性質：

1. 任意の状態に対して定義される→非平衡状態も扱える。

2. 非負性：

$$\begin{cases} \Delta S_A = 0 \iff [\rho_A, U_A(g)] = 0 & \text{（対称性がある）} \\ \Delta S_A > 0 \iff [\rho_A, U_A(g)] \neq 0 & \text{（対称性の破れ）} \end{cases}$$

[Kullbck-Leibler, 1951]

3. 部分系における対称性の破れの定量化：

$$0 < \Delta S_A < \Delta S'_A$$

対称性の破れが　小さい　大きい

EAは対称性の破れを定量化する性質の良い量

1. Introduction

これにより対称性の回復に関する量子Mpemba効果が盛んに研究されるようになった。

先行研究（量子Mpemba効果）

- 量子スピン系(空間1次元、2次元、可積分系) [Murciano et al, 2023] and so on
- 実験的な検証 [Joshi et al, 2024] and so on
- (1+1)次元共形場理論($U(1)$に限る) [Benini-Godet-Singh, 2024]

先行研究では$U(1)$, $\mathbb{Z}_N$といったAbelianの対称性のみを扱っている。

non-Abelianに対する量子Mpemba効果はまだよくわかっていない(特に場の理論)。

1. Introduction

これにより対称性の回復に関する量子Mpemba効果が盛んに研究されるようになった。

先行研究（量子Mpemba効果）

・量子スピン系(空間1次元、2次元、可積分系) [Murciano et al, 2023] and so on

・実験的な検証 [Joshi et al, 2024] and so on

・(1+1)次元共形場理論($U(1)$に限る) [Benini-Godet-Singh, 2024]

先行研究では$U(1)$, $\mathbb{Z}_N$といったAbelianの対称性のみを扱っている。

non-Abelianに対する量子Mpemba効果はまだよくわかっていない(特に場の理論)。

本研究

・Wess-Zumino-Witten modelを用いて$SU(N)$対称性に対するEAを一般のNで厳密に解析した。

・量子Mpemba効果が**non-Abelianに対しても存在することを初めて示した**。

・**新しいタイプの量子Mpemba効果を発見した**(後述)。

2. 本研究の内容

2. 本研究の内容

$\widehat{su}(N)_k$ Wess-Zumino-Witten model (2次元CFT) を考える。

Mermin-Wagnerの定理より、自発的対称性の破れは起こらない。[Mermin-Wagner, 1966]

初期状態

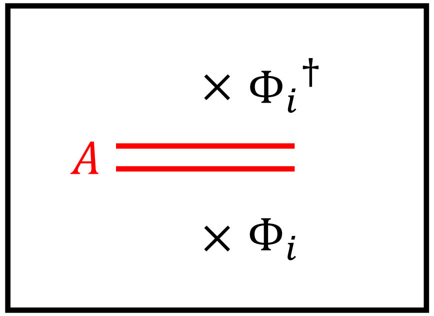
$$|\psi_{AB}(t=0)\rangle = \Phi_i(x_0,\tau_0)|0\rangle$$

Φ_i: 基本表現のプライマリ場
$(i = 1, \ldots, N)$

***SU*(*N*)対称性をexplicitに破る状態**

部分系Aに注目

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B[|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|] =$$



経路積分表示

計算する量：Rényi EA

$$\Delta S_A^{(n)} \equiv \frac{1}{1-n}\log\frac{\mathrm{Tr}_A[\rho_{A,G}^n]}{\mathrm{Tr}_A[\rho_A^n]}, \qquad \lim_{n\to 1}\Delta S_A^{(n)} = \Delta S_A$$

Rényi EAの時間発展を見ることで、部分系における対称性の回復を調べられる。

2. 本研究の内容

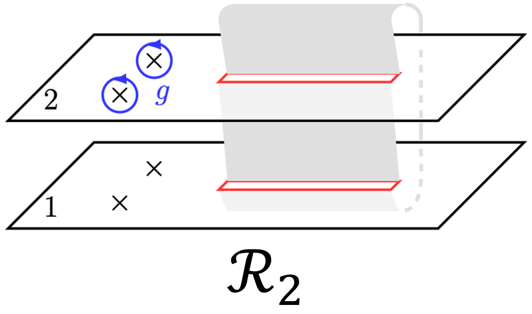
簡単のため$\Delta S_A^{(2)}(n=2)$を考える。

解析方法の概要:

レプリカ法

[Benini et al, 2024]

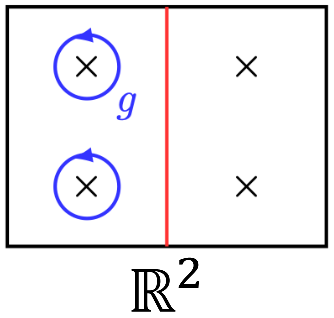
$\mathrm{Tr}_A\left[\rho_{A,G}^2\right] \sim$



共形変換

[He et al, 2024]

$\mathcal{R}_2 \to$



4点関数の計算

[Knizhnik et al, 1984]

$$\langle \Phi_i {\Phi_j}^\dagger \Phi_k {\Phi_\ell}^\dagger \rangle$$

→解析形が知られている

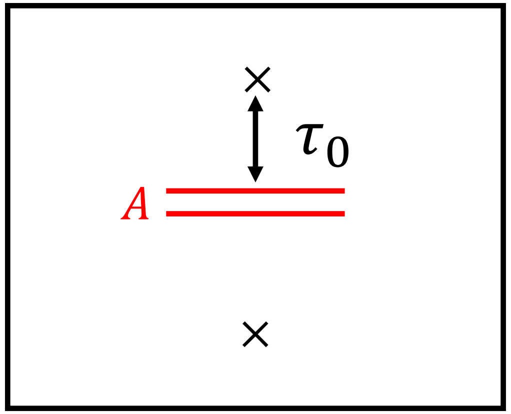
これらの手法を組み合わせて、$\widehat{su}(N)_k$ WZW modelにおけるRényi EAを厳密に導出した。

2. 本研究の結果

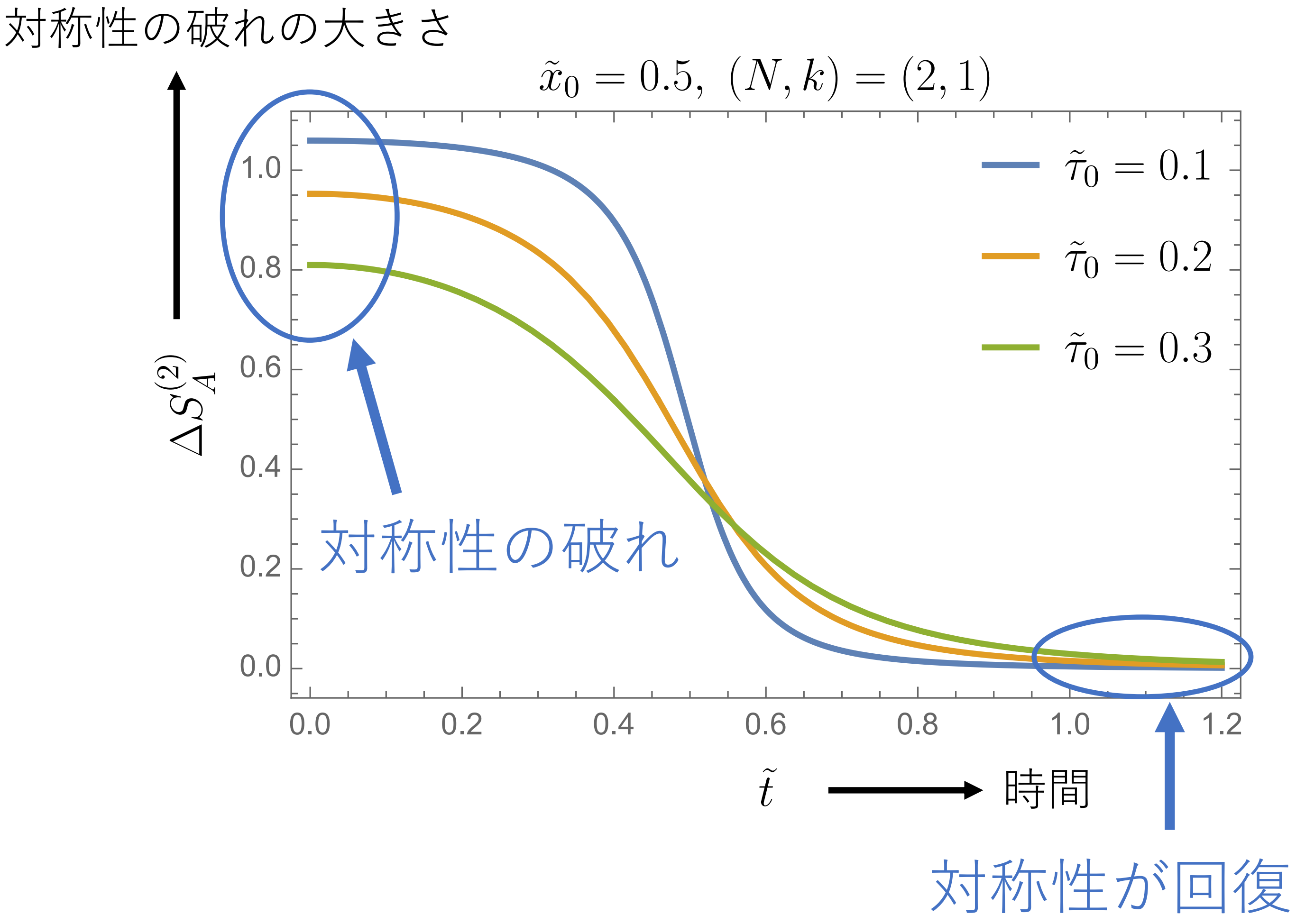
時間発展により$SU(N)$対称性の回復を見る。

初期状態

$\rho_A =$



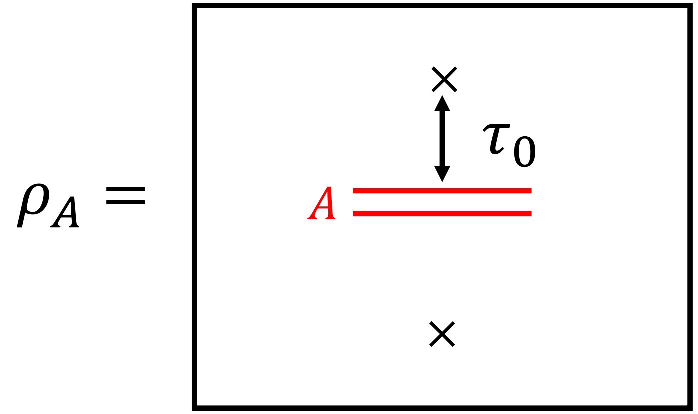
τ_0: 初期状態の対称性の破れを変えるパラメーター



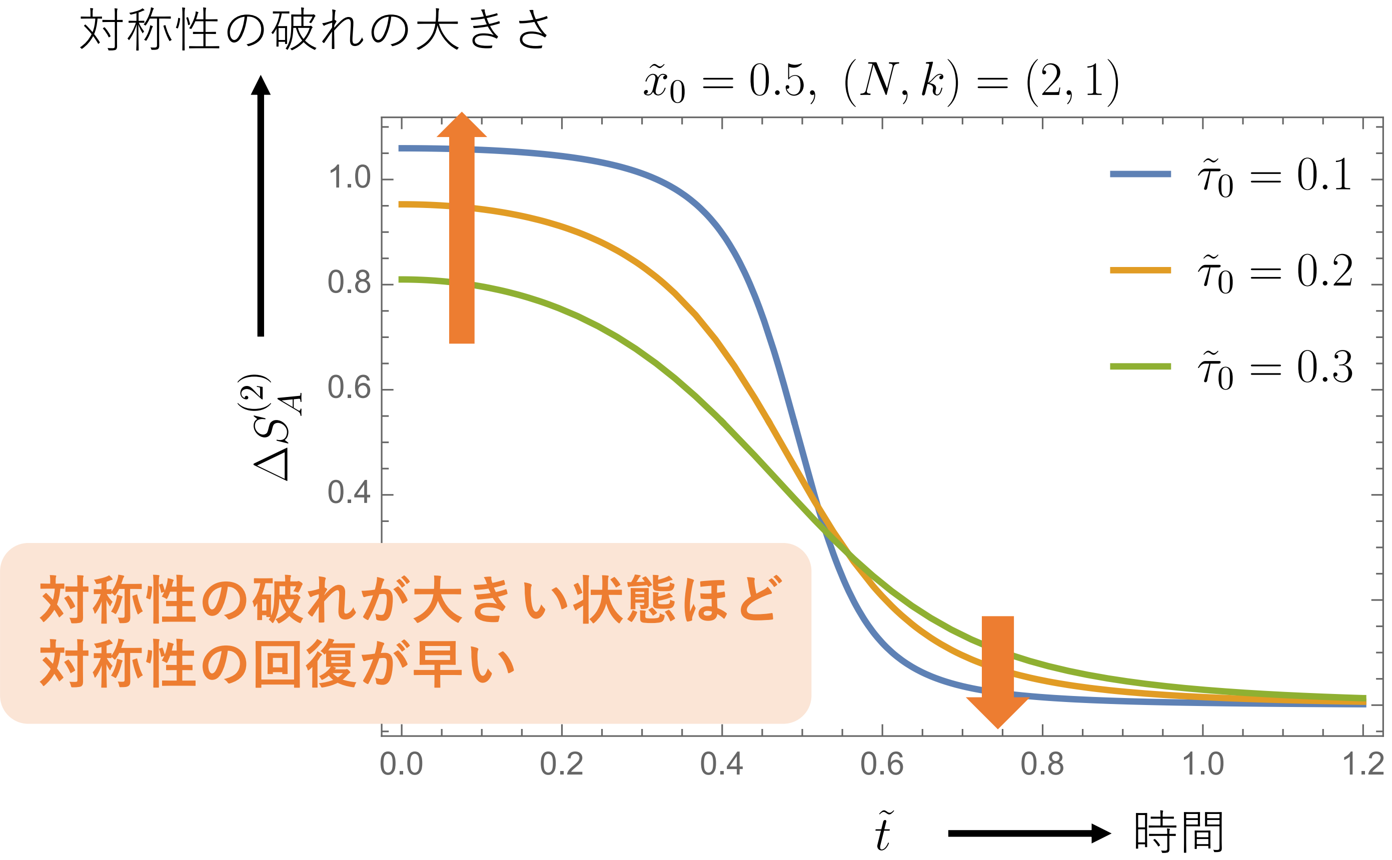
2. 本研究の結果

時間発展により$SU(N)$対称性の回復を見る。
(Nは固定)

初期状態



τ_0: 初期状態の対称性の破れを変えるパラメーター

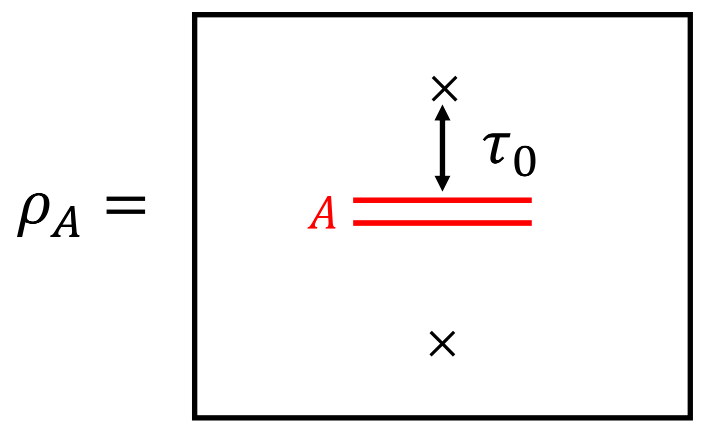


Non-Abelianで量子Mpemba効果があることを解析的に示した。

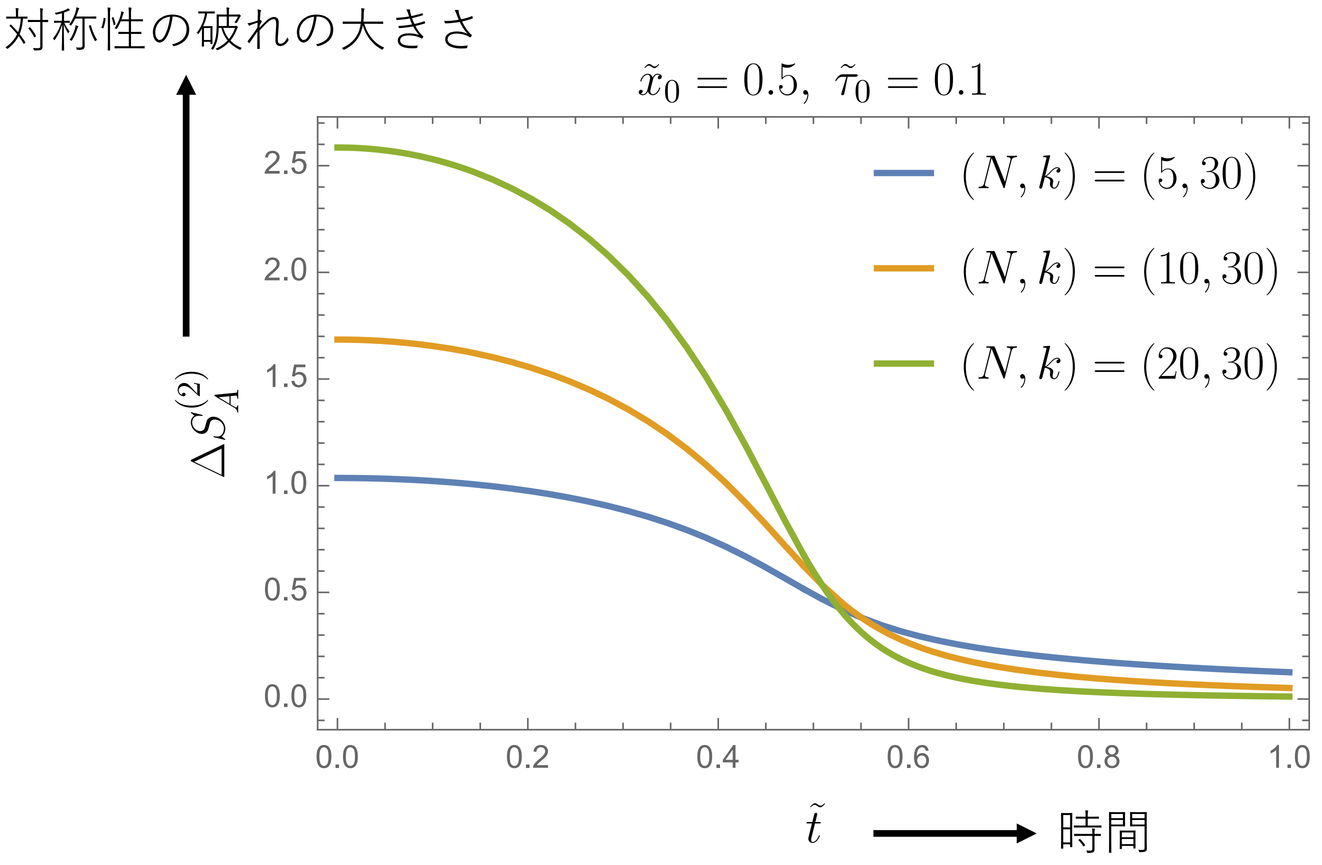
2. 本研究の結果

$SU(N)$のランクNの依存性を見る。

初期状態



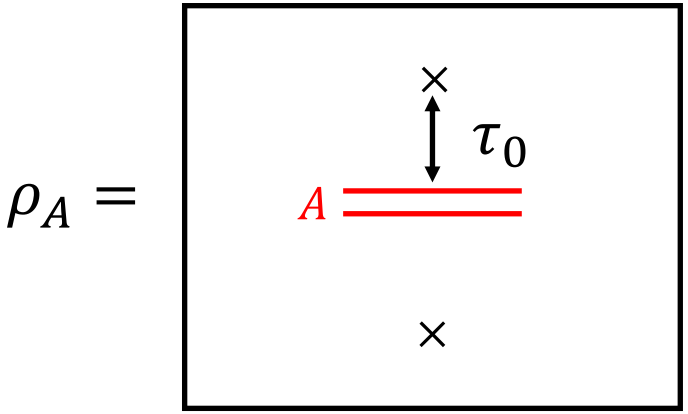
τ_0 を固定して、 N を動かす。



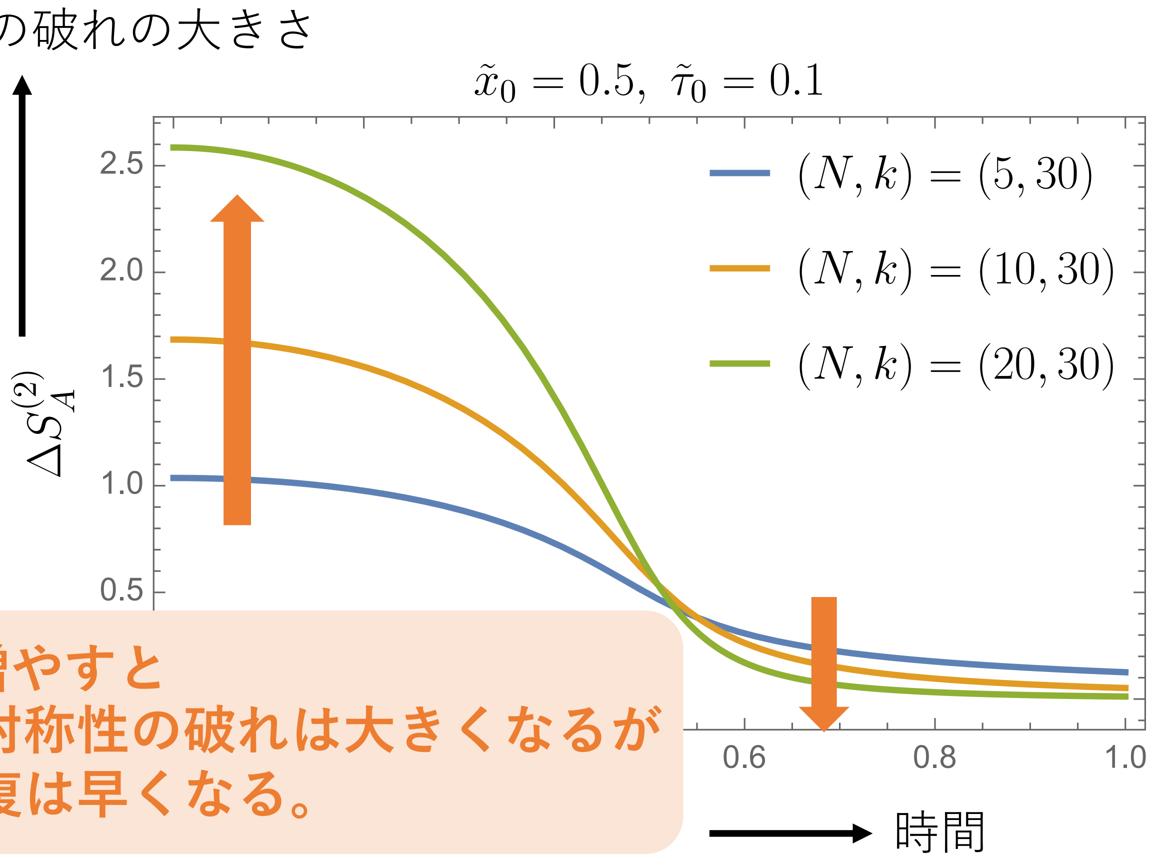
2. 本研究の結果

$SU(N)$のランクNの依存性を見る。

初期状態



τ_0を固定して、Nを動かす。



ランクNを増やすと初期状態の対称性の破れは大きくなるが対称性の回復は早くなる。

新しいタイプの量子Mpemba効果を発見した。

3. まとめ

今回発表した内容は結果の一部。

時間の都合上紹介できなかった内容

- 準粒子状態による物理的解釈
- level k 依存性とその量子Mpemba効果
- 初期状態としてWZWカレント(随伴表現)を用いた場合： $|\psi_{AB}(t=0)\rangle = J^a|0\rangle$

arXiv: 2509.05597v2

この発表のまとめ

- 近年では量子情報的な観点から対称性が調べられている→量子Mpemba効果
- 先行研究ではAbelianが主に扱われ、non-Abelianに対する量子Mpemba効果はよくわかっていなかった。
- 本研究では$\widehat{su}(N)_k$ WZW modelを用いて**non-Abelianでも量子Mpemba効果があることを初めて示した**。
- さらに、**新しいタイプの量子Mpemba効果を発見した**。

Appendix

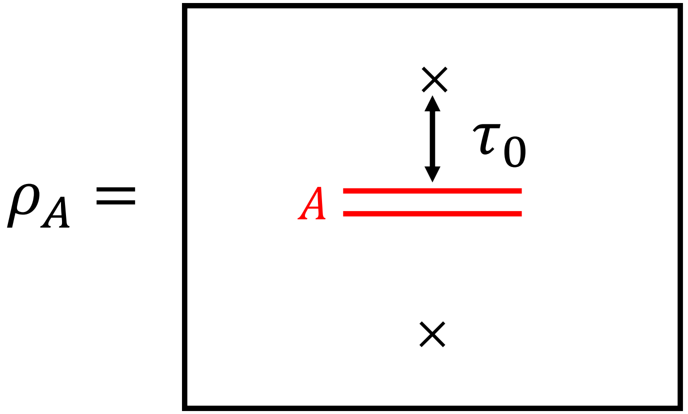
Appendix: 今後の展望

- $\widehat{so}(N)_k, \widehat{sp}(N)_k$ 対称性への拡張→今回の解析がstraightforwardに使える。
- 今回は基本表現と随伴表現を考えたが、他の表現で量子Mpemba効果があるかどうか。
- 量子Mpemba効果に対する有限温度効果
- 量子Mpemba効果のmicroscopicな起源と物理的解釈

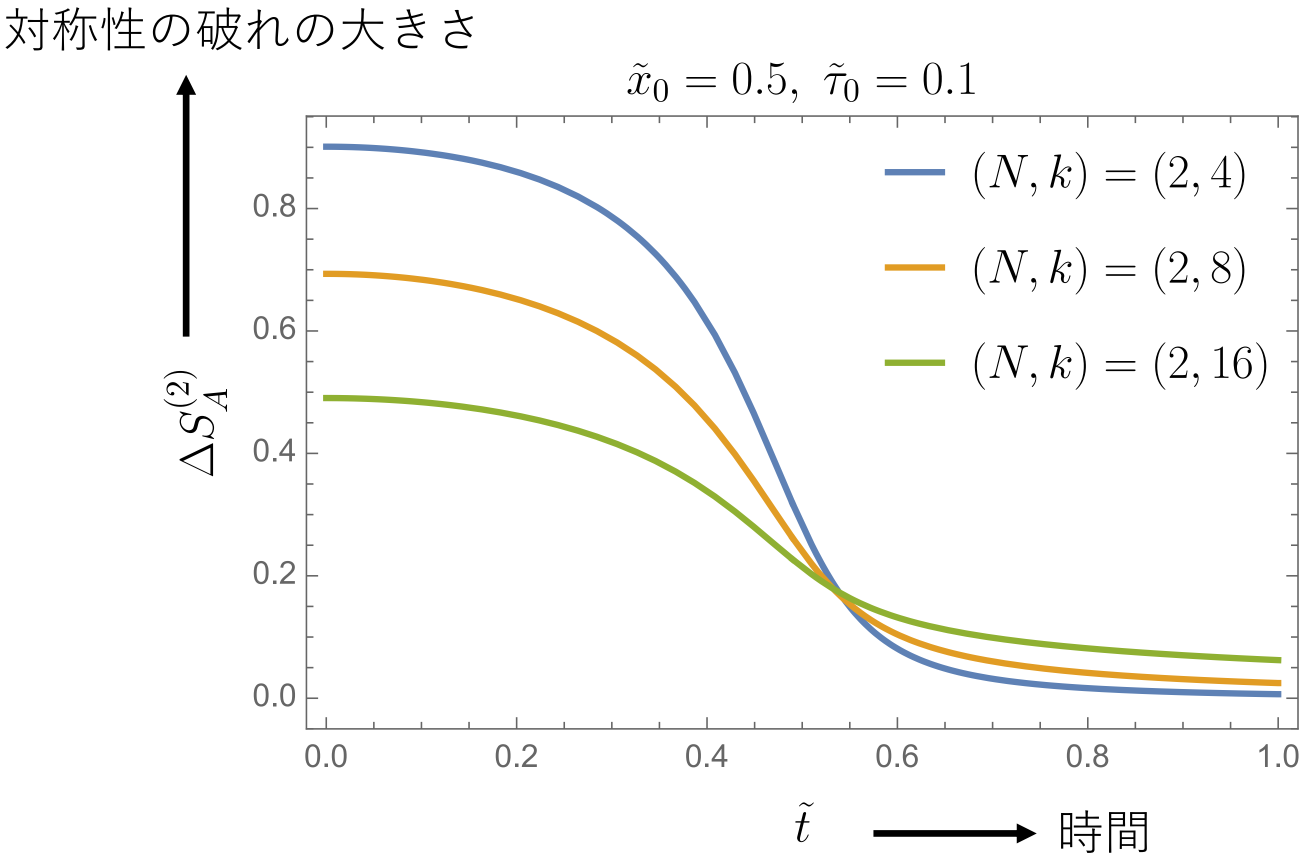
Appendix: level k 依存性について

Level k 依存性を見る。

初期状態



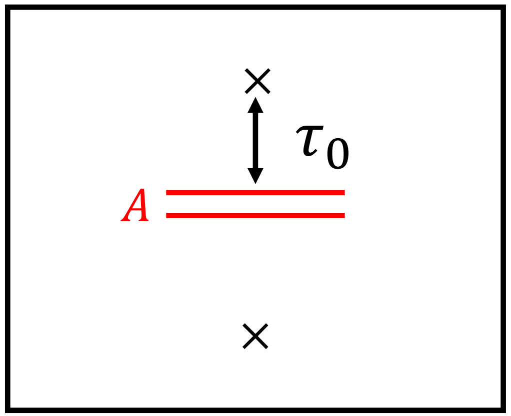
τ_0を固定して、 level k を動かす。



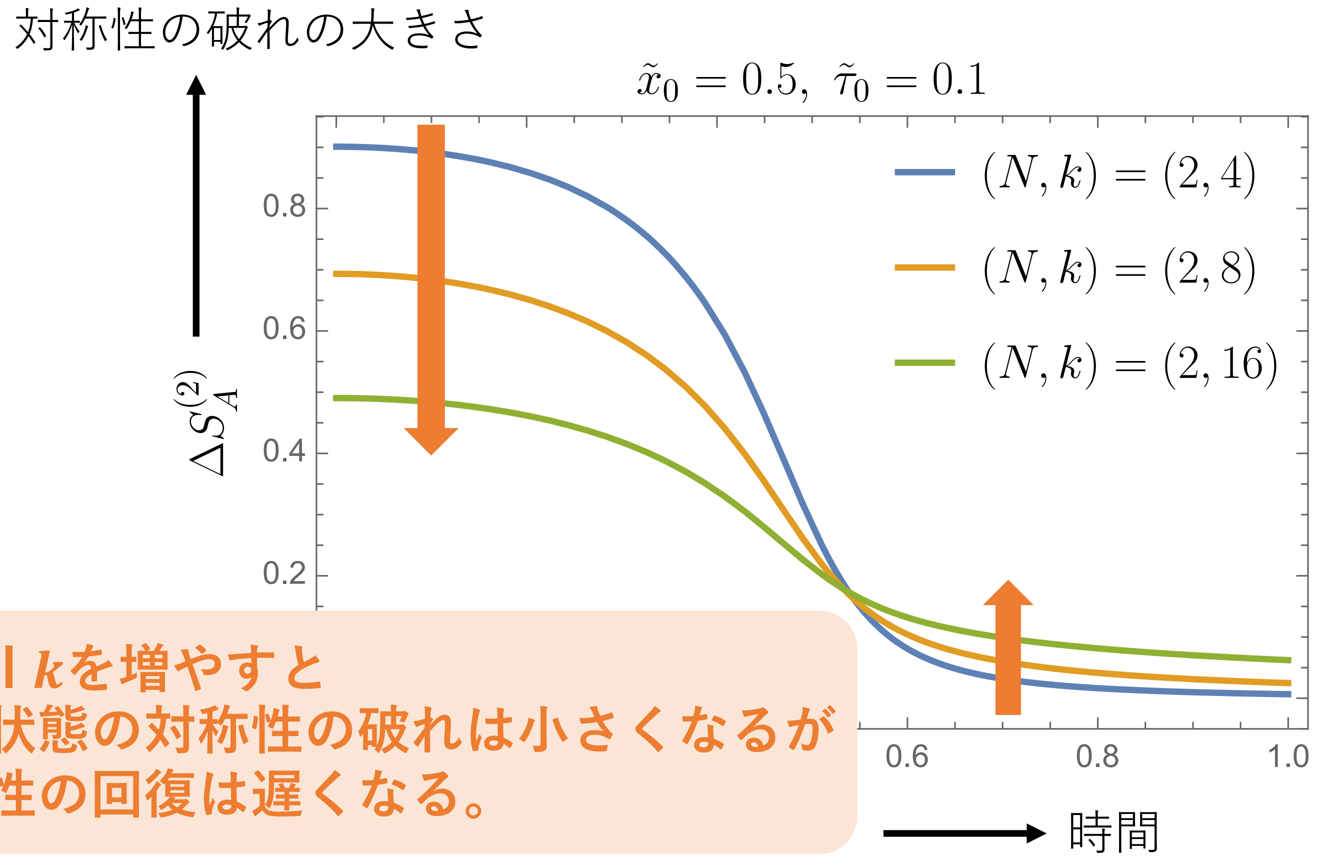
Appendix: level k 依存性について

Level k 依存性を見る。

初期状態

$\rho_A =$ 

τ_0を固定して、 level k を動かす。



Level kを増やすと
初期状態の対称性の破れは小さくなるが
対称性の回復は遅くなる。

➡ これも新しいタイプの量子Mpemba効果。

Appendix: カレントに対するEA

τ_0依存性((N,k)は固定)

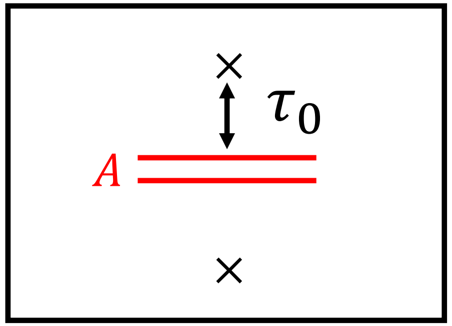
初期状態

$$|\psi_{AB}(t=0)\rangle = J^a(x_0,\tau_0)|0\rangle$$

J^a : 随伴表現のWZWカレント

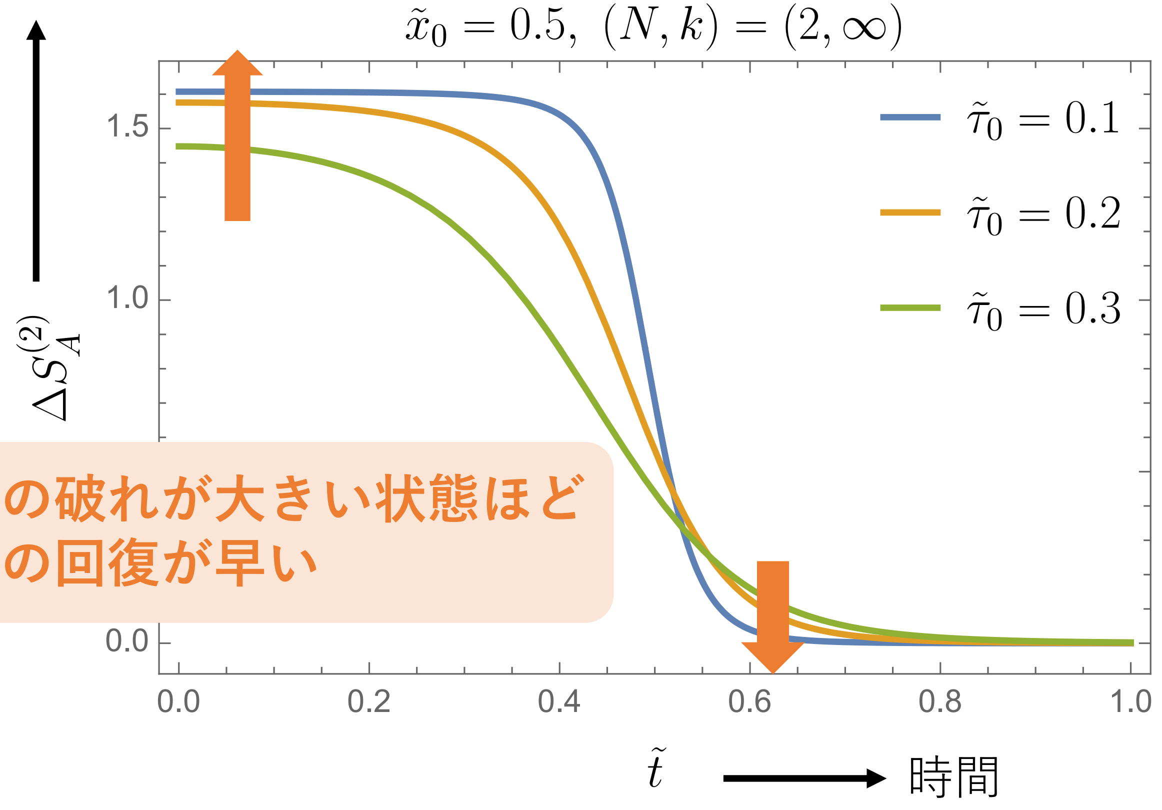
$a = 1, \dots, N^2 - 1$

$\rho_A =$



簡単のため、$k \to \infty$の極限を取る。

対称性の破れの大きさ



対称性の破れが大きい状態ほど対称性の回復が早い

この場合も量子Mpemba効果があることを示した。

Appendix: カレントに対するEA

N依存性（τ_0は固定）

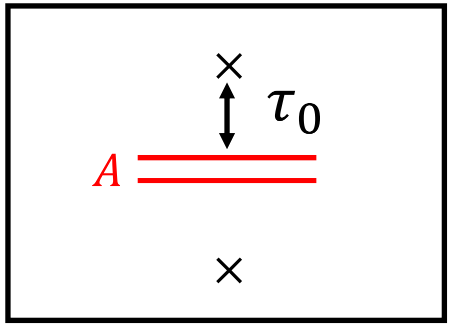
初期状態

$$|\psi_{AB}(t=0)\rangle = J^a(x_0,\tau_0)|0\rangle$$

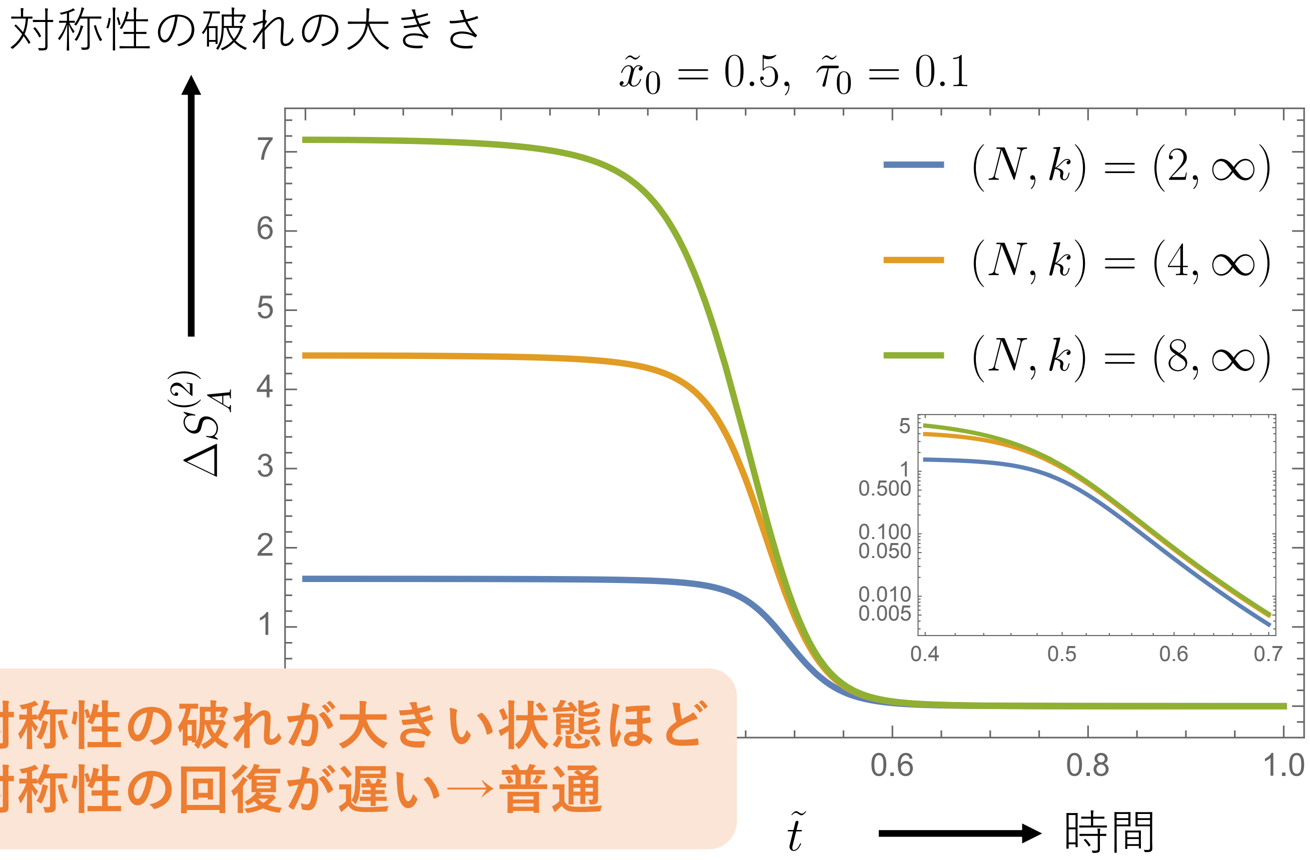
J^a：随伴表現のWZWカレント

$a = 1, \ldots, N^2-1$

$\rho_A =$



簡単のため、$k \to \infty$の極限を取る。



対称性の破れが大きい状態ほど
対称性の回復が遅い→普通

この場合は新しいタイプの量子Mpemba効果はなし。

Appendix: 準粒子状態による解釈について

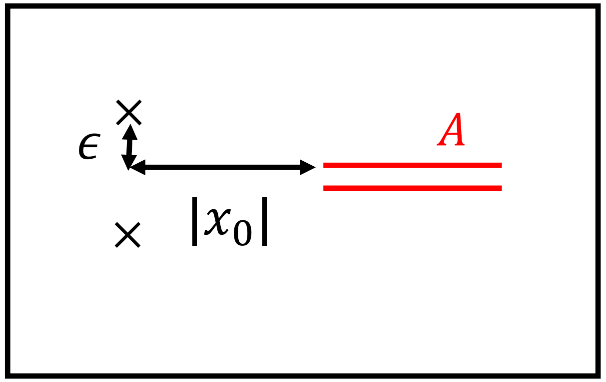
初期状態

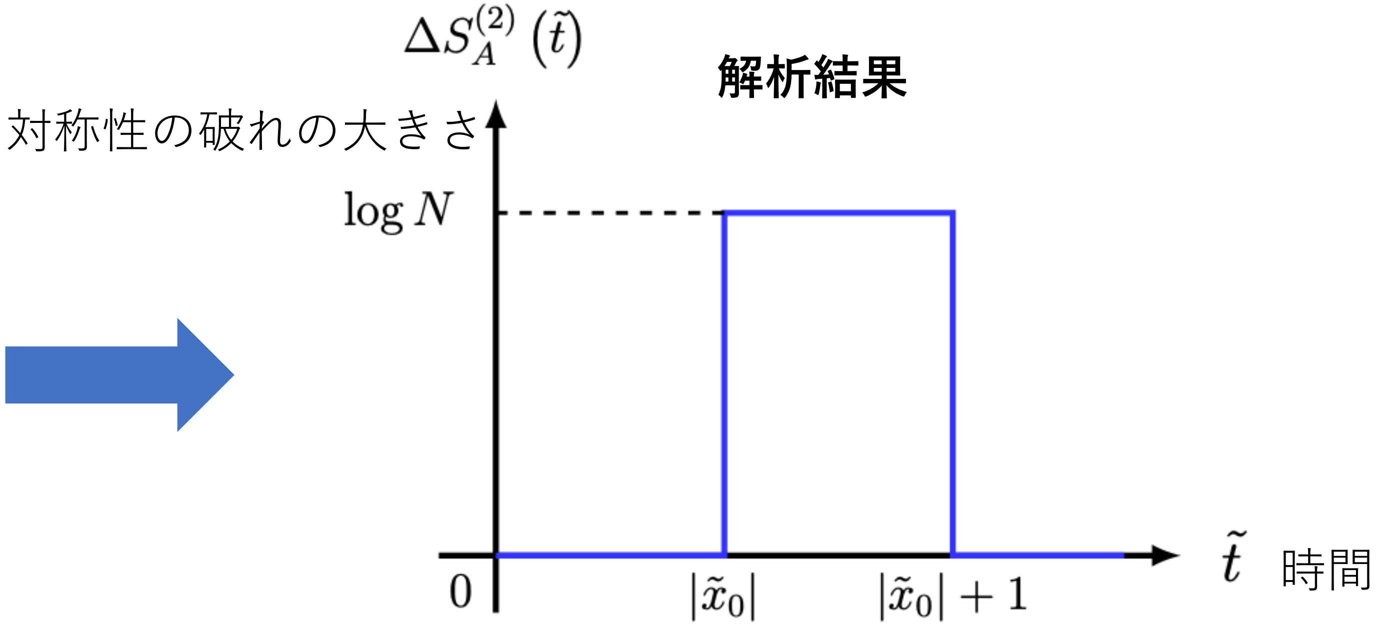
$$|\psi_{AB}(t=0)\rangle = \Phi_i(x_0, \tau_0)|0\rangle$$

Φ_i: 基本表現のプライマリ場
$(i = 1, \dots, N)$

$\tau_0 \to 0$の極限を考える。

$\rho_A =$





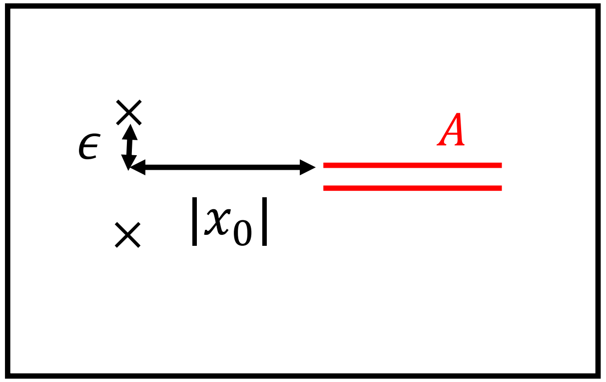
Appendix: 準粒子状態による解釈について

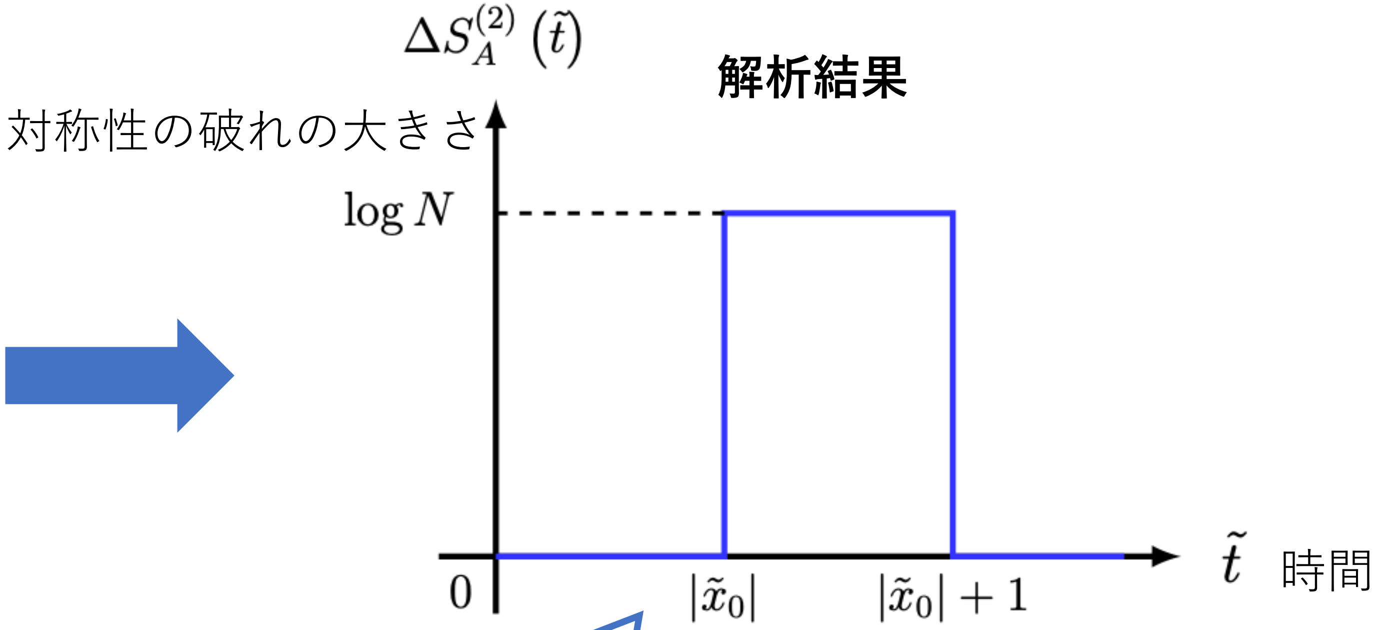
初期状態

$$|\psi_{AB}(t=0)\rangle = \Phi_i(x_0,\tau_0)|0\rangle$$

Φ_i: 基本表現のプライマリ場
$(i = 1, \dots, N)$

$\tau_0 \to 0$の極限を考える。

$\rho_A =$ 



物理的解釈