

ボソン/フェルミオン双対性を用いた相互作用を含む エンタングルメントRényiエントロピーの解析

講演番号：21aS1-8

大阪大学素粒子論研究室*

発表者：藤村晴伸*

共同研究者：西岡辰磨*、嶋守聡一郎*

[arXiv:2309.11889](https://arxiv.org/abs/2309.11889) Published in [Phys. Rev. D **108**, 125016](#)

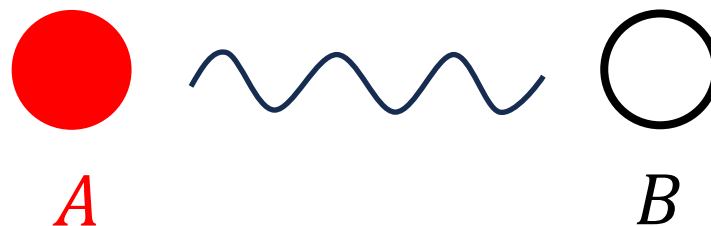
アウトライン

1. イントロダクション(レビュー)
2. 相互作用のあるモデルにおける解析方法(研究)
3. 解析結果 の概要(研究)
4. まとめ

1. イントロダクション(レビュー)

1. エンタングルメントとは？

エンタングルメント：古典論では説明できない量子論特有の相関



2022年ノーベル物理学賞
エンタングルメントの
実験的な検証

例：ベル状態

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B)$$

A の測定値が \uparrow \Leftrightarrow B の測定値は \uparrow
 A の測定値が \downarrow \Leftrightarrow B の測定値は \downarrow

重ね合わせによって
 A と B は相関している

エンタングルメントの応用例

【量子情報分野】エンタングルメントは基本的な概念

応用例：量子テレポーテーション、量子コンピュータ

【素粒子論、物性理論】

ホログラフィー原理の研究、臨界現象の指標、物質相の分類など

1. エンタングルメントの大きさを表す量

密度行列 : $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$

縮約密度行列 : $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho_{AB}]$



エンタングルメント Rényi エントロピー (ERE) :

$$S_n(A) \equiv \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}_A[\rho_A^n], n \in \mathbb{Z}_+$$
$$\left(\lim_{n \rightarrow 1} S_n(A) = -\text{Tr}_A[\rho_A \log \rho_A] \right)$$

具体例) 簡単のため $n = 2$ とおく

ベル状態 : $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B)$

$$\rho_A = {}_B\langle\uparrow|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|\uparrow\rangle_B + {}_B\langle\downarrow|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|\downarrow\rangle_B = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|] \Rightarrow S_2(A) = -\log \text{Tr}_A[\rho_A^2] = \log 2 > 0$$

セパラブル状態(古典相関) : $|\psi'_{AB}\rangle = |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$

$$\rho_A = {}_B\langle\uparrow|\psi'_{AB}\rangle\langle\psi'_{AB}|\uparrow\rangle_B = |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow| \Rightarrow S_2(A) = -\log \text{Tr}_A[\rho_A^2] = 0$$

➡ EREはエンタングルメントの大きさを表す量

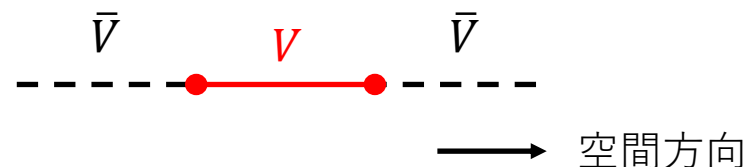
1. 場の量子論におけるエンタングルメント

場の量子論の場合、空間の各点に自由度がある

系 $A \rightarrow$ 領域 V

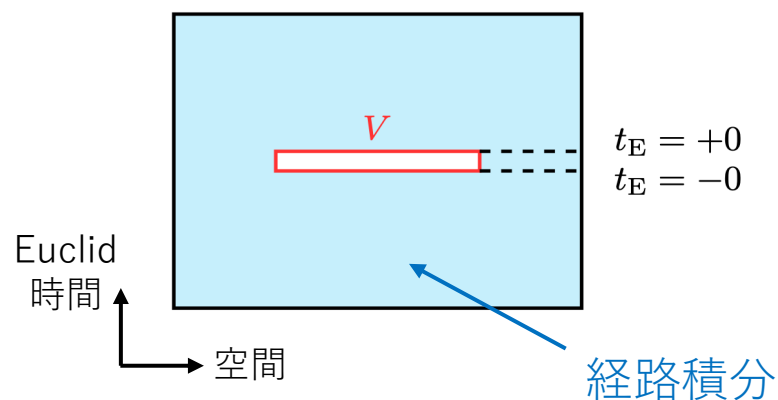
系 $B \rightarrow$ 領域 $\bar{V} = V$ 以外の空間

(1+1)次元の場合



レプリカ法 : EREを求める一般的な手法

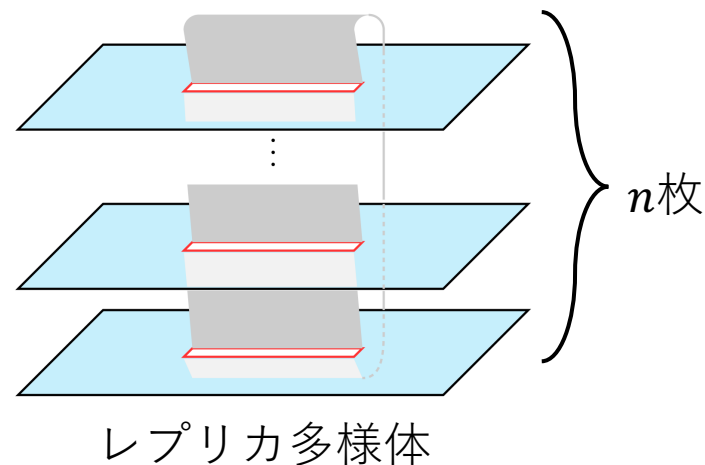
$$\rho_V = \text{Tr}_{\bar{V}}[|0\rangle\langle 0|]$$



系を n 個に複製



$$\text{Tr}_V[\rho_V^n] \sim Z_n \text{ 分配関数}$$



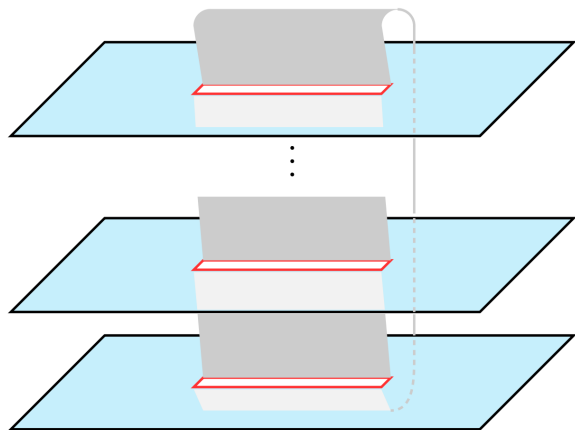
➡ EREを求めるにはレプリカ多様体上の分配関数を計算すれば良い

1. 場の量子論における先行研究

レプリカ法により様々な自由理論でエンタングルメントが計算できるようになった

先行研究の例 (2次元時空)

- Free massless fermion [Casini, Fosco, Huerta 2005]
- Free compact boson [Calabrese, Cardy, Tonni 2011]



レプリカ多様体

しかし相互作用がある場合、
エンタングルメントの計算は非常に難しい

∴レプリカ多様体上の分配関数の計算が非常に難しい



相互作用の効果を厳密に解析計算した例はほとんどない

1. ボソン/フェルミオン双対性

相互作用を含む系でエンタングルメントの振る舞いを見たい！

➡ 我々のアイデア：**ボソン/フェルミオン双対性**を使う。[Karch, Tong, Turner 2019]

フェルミオンの理論

局所演算子： \hat{O}^F

離散対称性： \mathbb{Z}_2^F

分配関数： Z^F

フェルミオン化



ボソン化

ボソンの理論

局所演算子： \hat{O}^B

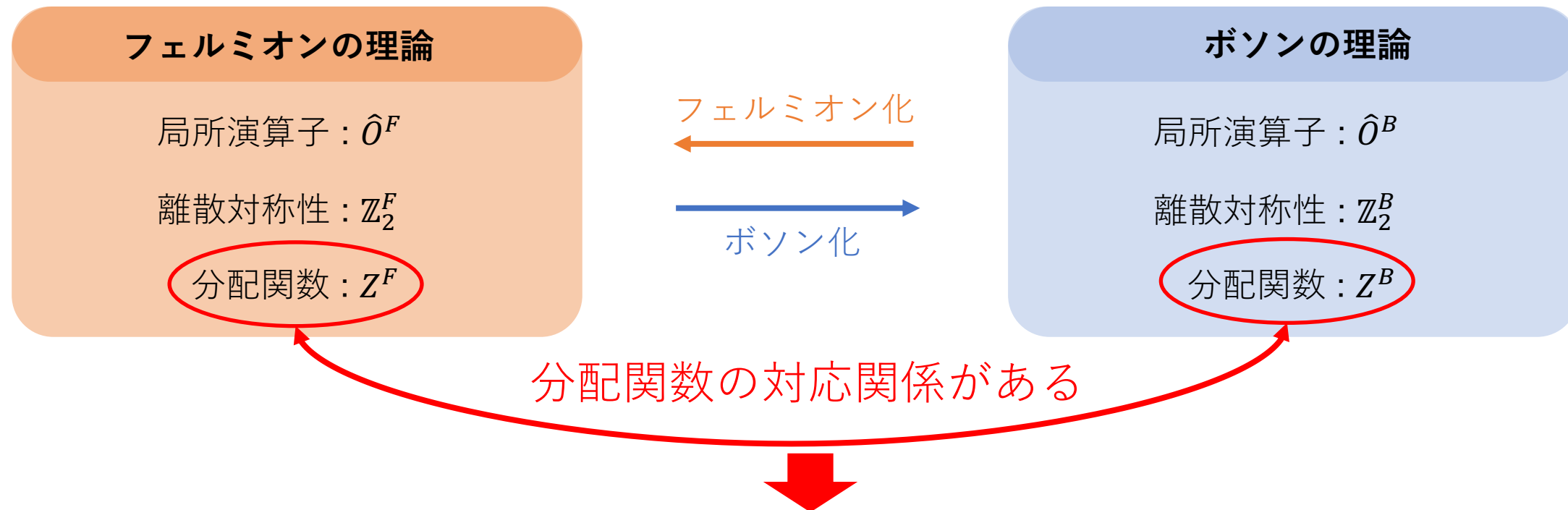
離散対称性： \mathbb{Z}_2^B

分配関数： Z^B

1. ボソン/フェルミオン双対性

相互作用を含む系でエンタングルメントの振る舞いを見たい！

➡ 我々のアイデア：**ボソン/フェルミオン双対性**を使う。[Karch, Tong, Turner 2019]



我々はこの双対性を用いて相互作用のある系でEREを厳密に解析した

2. 相互作用のあるモデルにおける解析方法(研究)

2. 相互作用のあるモデルにおける解析方法(研究)

セッティング

massless Thirring model [Thirring 1958]

$c = 1$ の2次元共形場理論

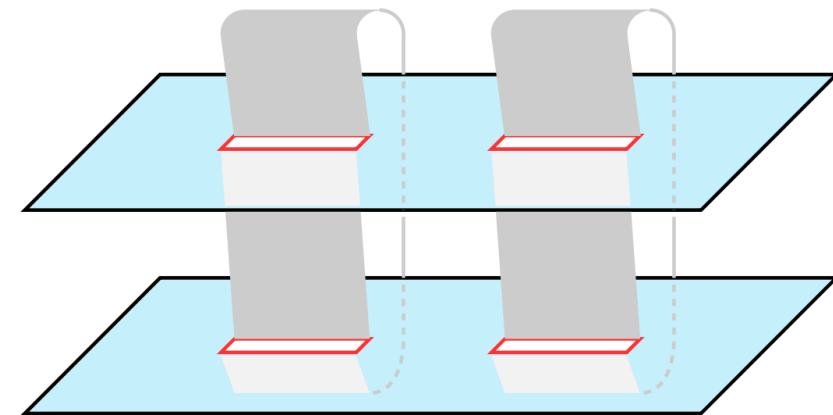
$$\mathcal{L}_F = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{\pi}{2} \lambda \underbrace{(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)}_{\text{相互作用}}$$

相互作用

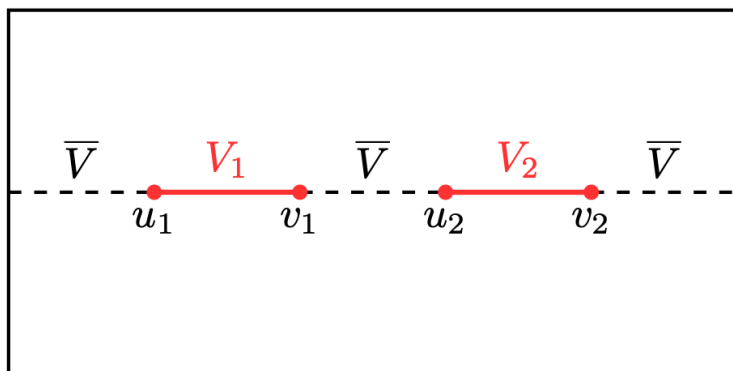
$n = 2$ のERE : $S_2(V) = -\log \text{Tr}_V[\rho_V^2]$

レプリカ法

$$\Rightarrow \text{Tr}_V[\rho_V^2] =$$



レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$

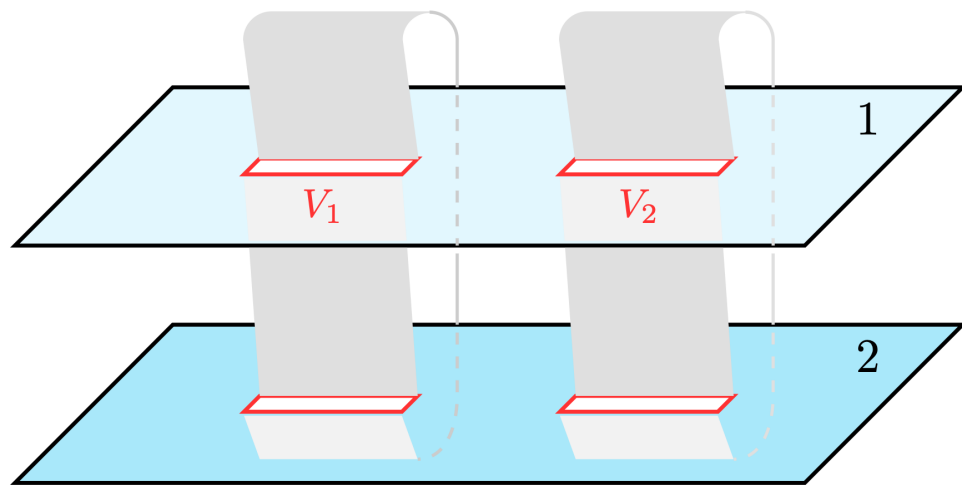


レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$ 上の分配関数 $Z_{\Sigma_{2,2}}^F$ の計算方法 :

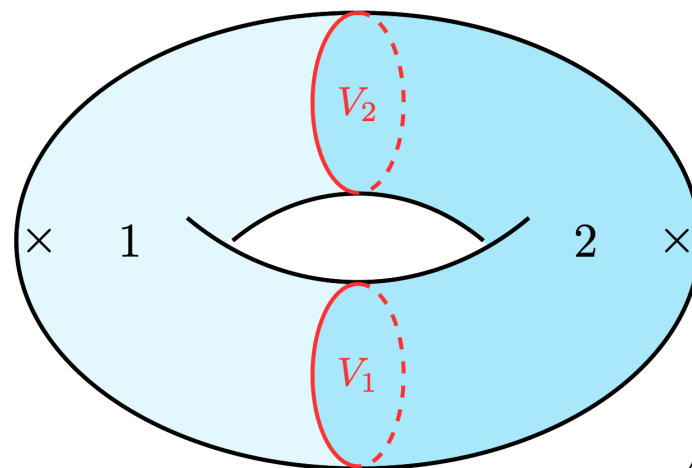
- ➡
- 共形変換
 - ボソン/フェルミオン双対性

2. 共形変換

$\Sigma_{2,2}$ は共形変換でトーラスにマップできる [Lunin, Mathur 2001]



レプリカ多様体 $\Sigma_{2,2}$



x : 無限遠点

トーラス

cross-ratio : $x = \frac{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}$



moduli : τ

$Z_{\Sigma_{2,2}}^F \sim Z_{\mathbf{T}}^F \rightarrow$ トーラス上の分配関数 $Z_{\mathbf{T}}^F$ を計算に帰着

2. ボソン/フェルミオン双対性

分配関数 $Z_{\mathbf{T}}^F$ の計算方法：ボソン/フェルミオン双対性

massless Thirring model

$$\mathcal{L}_F = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \underbrace{\frac{\pi}{2} \lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)}_{\text{相互作用}}$$

ψ : Dirac fermion

λ : Thirring coupling

\mathbb{Z}_2^F : $\psi \rightarrow -\psi$

そのままでは解析が難しい

free compact boson

$$\mathcal{L}_B = \frac{R^2}{8\pi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$$

$$\phi \sim \phi + 2\pi$$

ϕ : スカラー場

R : compact boson半径

\mathbb{Z}_2^B : $\phi \rightarrow \phi + \pi$

自由場なので解析が簡単

フェルミオン化

$$1 + \lambda = \frac{4}{R^2}$$



フェルミオン化を用いてトーラス上の分配関数 $Z_{\mathbf{T}}^F$ をボソン側から解析

3. 解析結果の概要（研究）

3. 解析結果の概要

$$S_2(V) \xleftarrow{\text{レプリカ法}} Z_{\Sigma_{2,2}}^F \xleftarrow{\text{共形変換}} Z_{\mathbf{T}}^F \xleftarrow{\text{フェルミオン化}} Z_{\mathbf{T}}^B$$

[H. F., T. Nishioka, S. Shimamori, 2023]

研究結果

$$S_2(V, \lambda) = S_2(V, 0) - \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(\tau)} \sum_{j=2}^4 \vartheta_j^2(\tau(1+\lambda)) \vartheta_j^2\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right) \right]$$

$$x = \left(\frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^4$$

x : 領域 V の cross-ratio

τ : トーラスの moduli

λ : 結合定数

$\vartheta_j(\tau)$, $j = 2, 3, 4$: Jacobi theta 関数

3. 解析結果の概要

$$S_2(V) \xleftarrow{\text{レプリカ法}} Z_{\Sigma_{2,2}}^F \xleftarrow{\text{共形変換}} Z_T^F \xleftarrow{\text{フェルミオン化}} Z_T^B$$

[H. F., T. Nishioka, S. Shimamori, 2023]

研究結果

$$S_2(V, \lambda) = \boxed{S_2(V, 0)} - \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(\tau)} \sum_{j=2}^4 \vartheta_j^2(\tau(1+\lambda)) \vartheta_j^2\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right) \right]$$

Free項

$$x = \left(\frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^4$$

x : 領域 V の cross-ratio
 τ : トーラスの moduli
 λ : 結合定数
 $\vartheta_j(\tau), j = 2, 3, 4$: Jacobi theta 関数

既存の研究結果(free fermion)と一致

3. 解析結果の概要

$$S_2(V) \xleftarrow{\text{レプリカ法}} Z_{\Sigma_{2,2}}^F \xleftarrow{\text{共形変換}} Z_{\mathbf{T}}^F \xleftarrow{\text{フェルミオン化}} Z_{\mathbf{T}}^B$$

[H. F., T. Nishioka, S. Shimamori, 2023]

研究結果

$$S_2(V, \lambda) = S_2(V, 0) - \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(\tau)} \sum_{j=2}^4 \vartheta_j^2(\tau(1+\lambda)) \vartheta_j^2\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right) \right] \quad \text{相互作用項}$$

$$x = \left(\frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^4$$

x : 領域 V の cross-ratio
 τ : トーラスの moduli
 λ : 結合定数
 $\vartheta_j(\tau)$, $j = 2, 3, 4$: Jacobi theta 関数

$\lambda = 0$ とすると、ヤコビ恒等式 $\vartheta_3^4(\tau) - \vartheta_2^4(\tau) - \vartheta_4^4(\tau) = 0$ から
相互作用項はゼロになる

3. 解析結果の概要

$$S_2(V) \xleftarrow{\text{レプリカ法}} Z_{\Sigma_{2,2}}^F \xleftarrow{\text{共形変換}} Z_T^F \xleftarrow{\text{フェルミオン化}} Z_T^B$$

[H. F., T. Nishioka, S. Shimamori, 2023]

研究結果

$$S_2(V, \lambda) = S_2(V, 0) - \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(\tau)} \sum_{j=2}^4 \vartheta_j^2(\tau(1 + \lambda)) \vartheta_j^2\left(\frac{\tau}{1 + \lambda}\right) \right]$$

相互作用項

$$x = \left(\frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^4$$

x : 領域 V の cross-ratio

τ : トーラスの moduli

λ : 結合定数

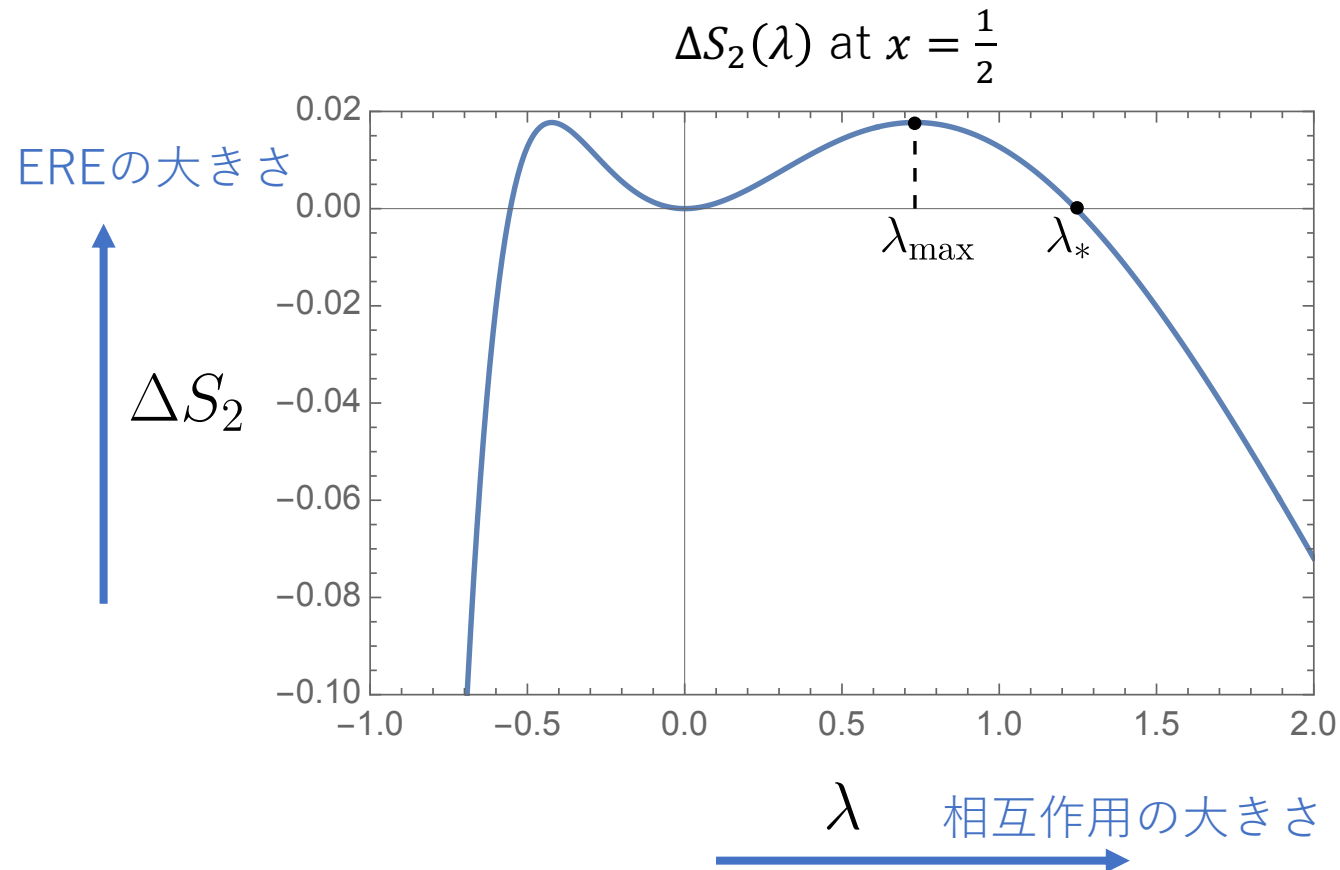
$\vartheta_j(\tau)$, $j = 2, 3, 4$: Jacobi theta 関数

任意の λ で成り立つ式

➡ 相互作用のある場の量子論で厳密な Rényi エントロピーを導出した

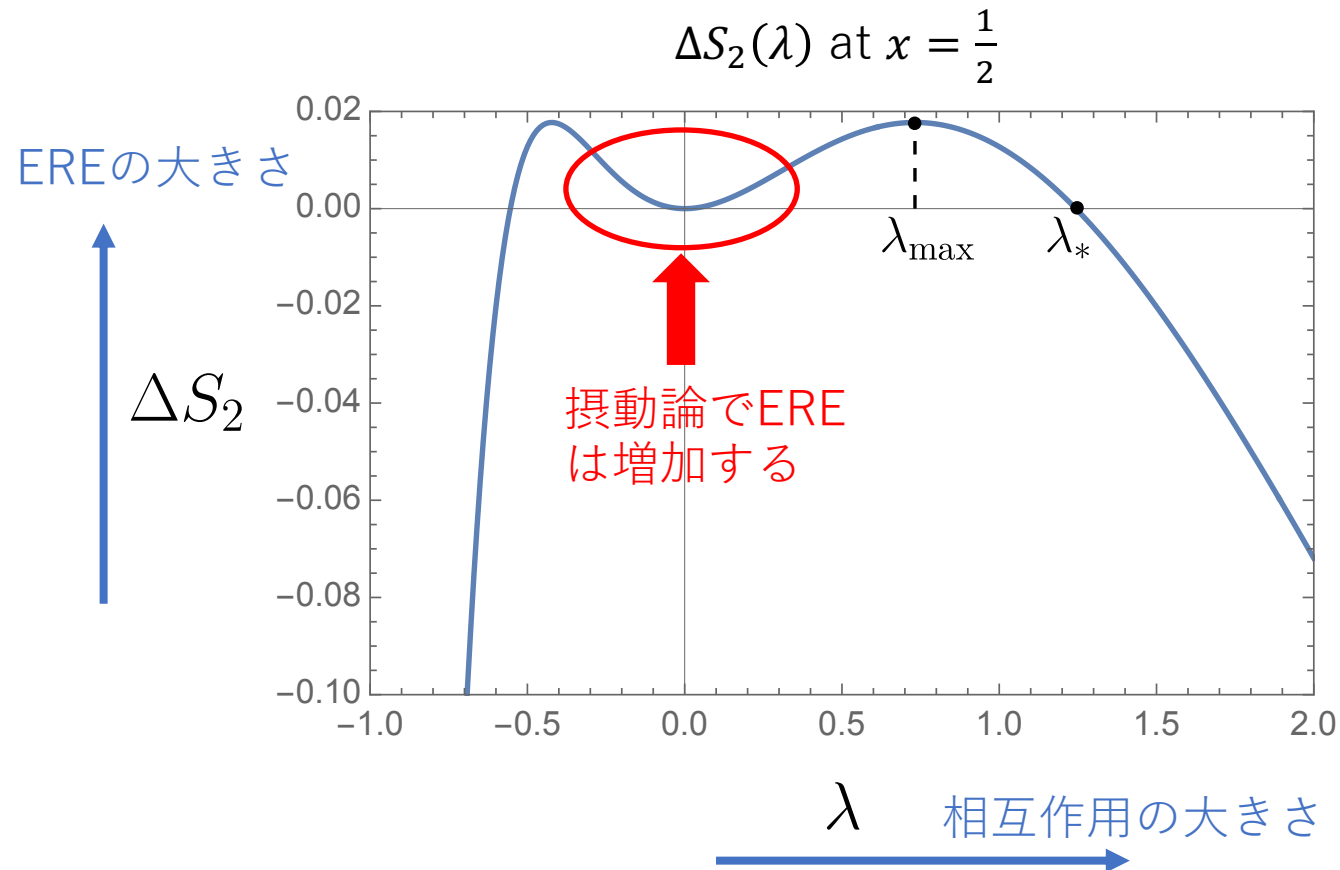
3. エンタングルメント Rényi エントロピー (ERE) の結合定数依存性

$$\Delta S_2(\lambda) = S_2(V, \lambda) - S_2(V, 0)$$



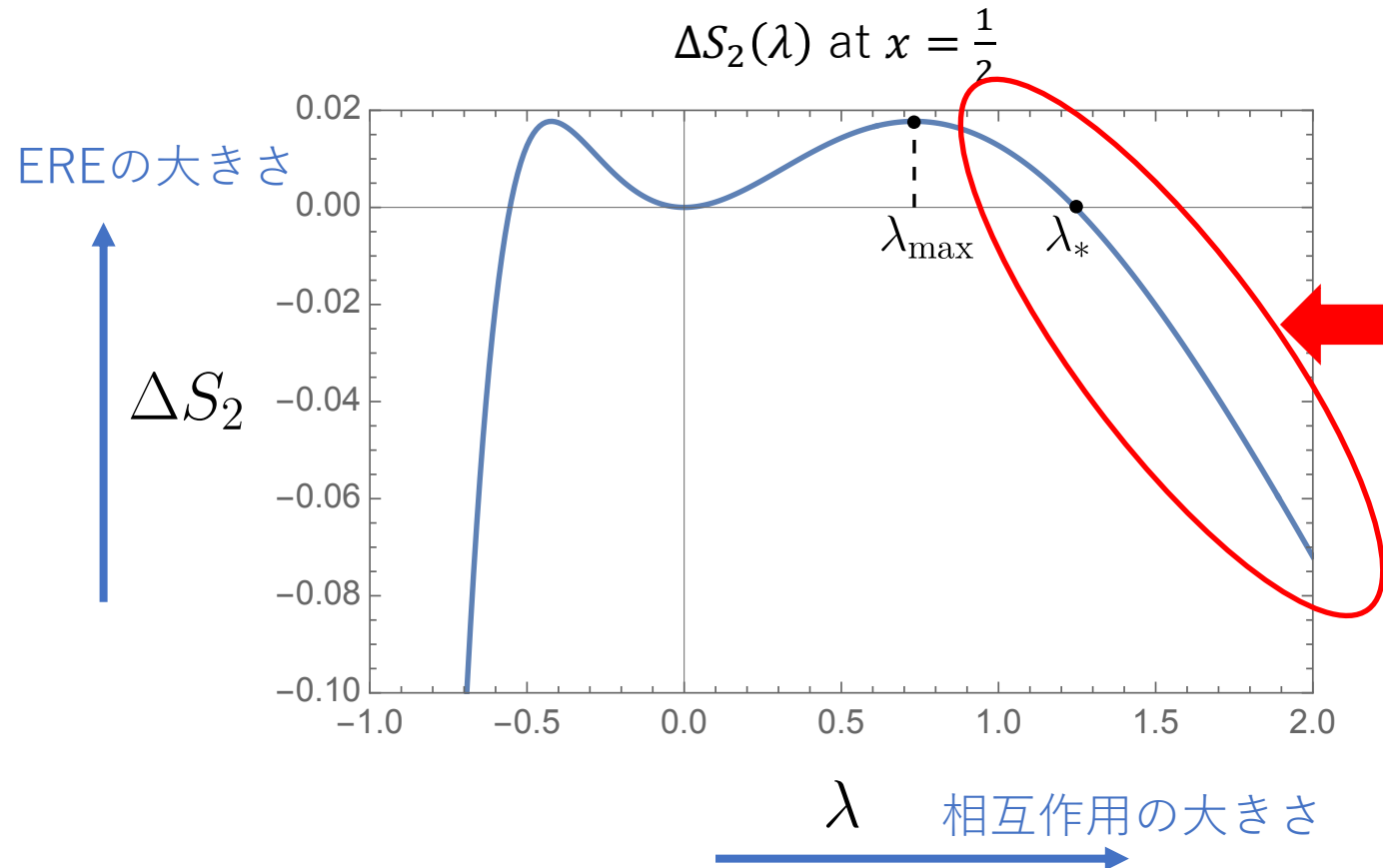
3. エンタングルメント Rényi エントロピー (ERE) の結合定数依存性

$$\Delta S_2(\lambda) = S_2(V, \lambda) - S_2(V, 0)$$



3. エンタングルメント Rényi エントロピー (ERE) の結合定数依存性

$$\Delta S_2(\lambda) = S_2(V, \lambda) - S_2(V, 0)$$



摂動論的領域と違い、
非摂動論的領域ではEREが
減少することがわかった

➡ 非摂動論的領域も含め、EREの相互作用依存性を明らかにした

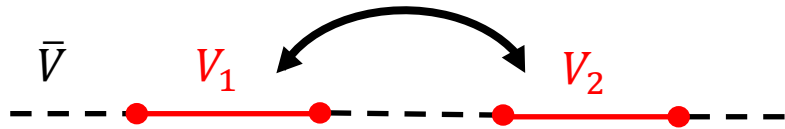
3. その他の我々の研究成果について

1. EREの領域 V の長さ依存性

[H.F., T. Nishioka, S. Shimamori, 2023]

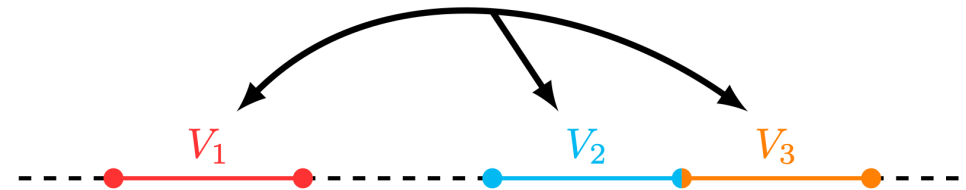
2. 相互Rényi情報量

: 領域 V_1, V_2 間のエンタングルメント



3. トリパーティットRényi情報量

: 3つの領域間のエンタングルメント



➡ 本研究では他の量子情報量も解析した

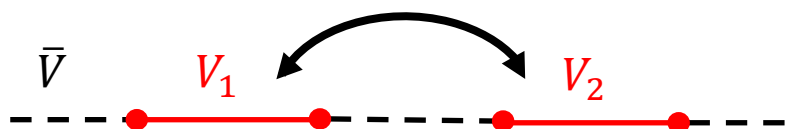
3. その他の我々の研究成果について

1. EREの領域 V の長さ依存性

[H.F, T. Nishioka, S. Shimamori, 2023]

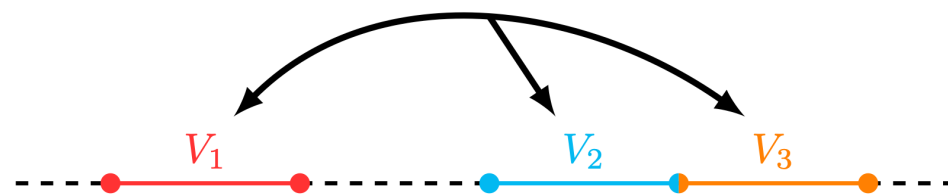
2. 相互Rényi情報量

: 領域 V_1, V_2 間のエンタングルメント



3. トリパーティットRényi情報量

: 3つの領域間のエンタングルメント



➡ 本研究では他の量子情報量も解析した

補足：後続研究

massless Thirring modelと等価なスピン模型での研究がなされた。

[Marić, Bocini, Fagotti, 2023.12]

➡ 彼らの結果は我々の結果と一致

非自明なconsistency check

4. まとめ

【先行研究】

- エンタングルメントは現代物理学において重要な概念。
 - 場の量子論における一般的な解析方法：レプリカ法
 - しかし、実際に計算することは難しく、相互作用の効果は扱えなかった。
-

【我々の研究】

- レプリカ法とボソン/フェルミオン双対性を用いて相互作用のある系でのEREを厳密に計算できる例を示した。
- 我々のEREの計算結果は相互作用依存性を明白に含む。
- 非摂動的な場合、EREは減少することが示せた。

付録

エンタングルメントエントロピーの面積則：

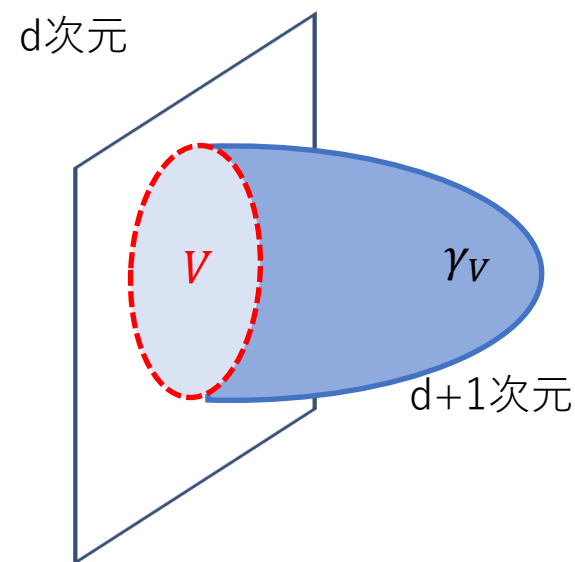
$$S(V) = \frac{1}{4 G_N} A(\gamma_V)$$

[Ryu, Takayanagi 2006]



ブラックホールの面積則：

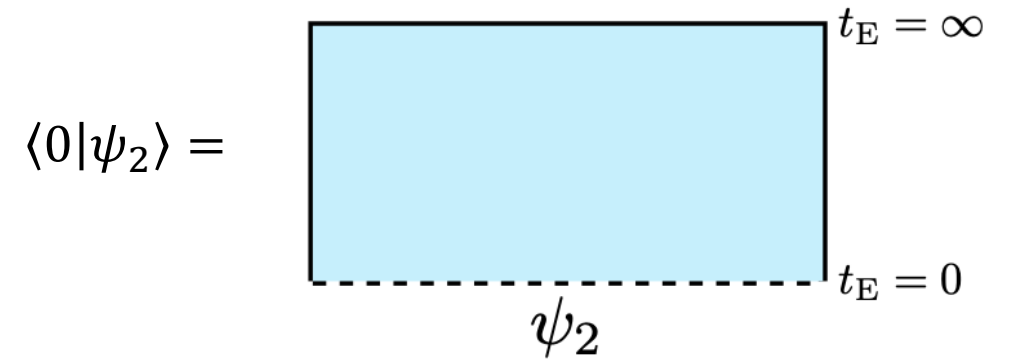
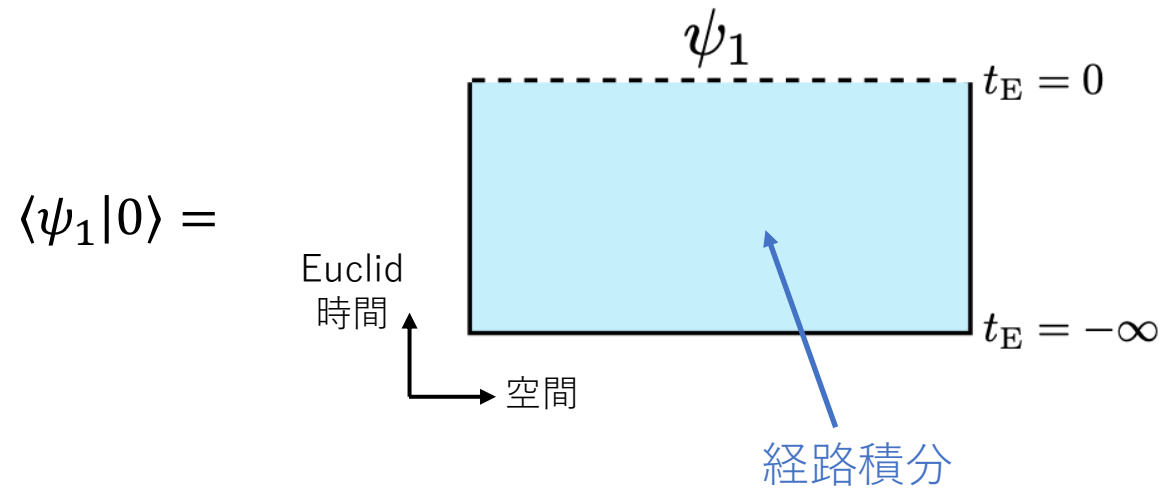
$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4 \hbar G_N} A$$



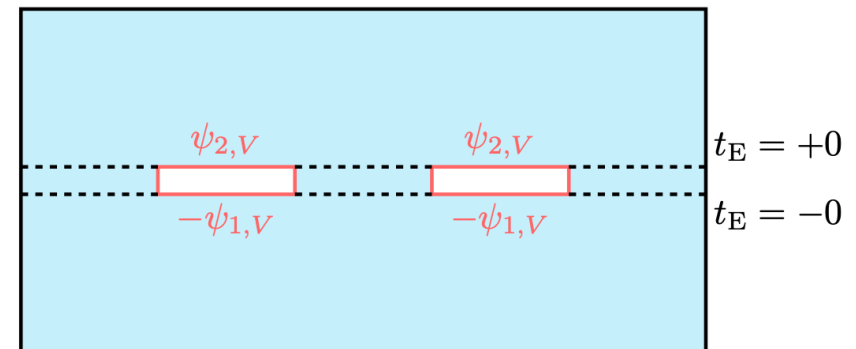
➡ エンタングルメントはホログラフィー原理の研究に新たな切り口を与えた

付録：レプリカ法の詳細

Euclidean経路積分を考える。



$$\rho_V(\psi_1, \psi_2) = \text{Tr}_{\bar{V}}[\langle \psi_1 | 0 \rangle \langle 0 | \psi_2 \rangle] =$$



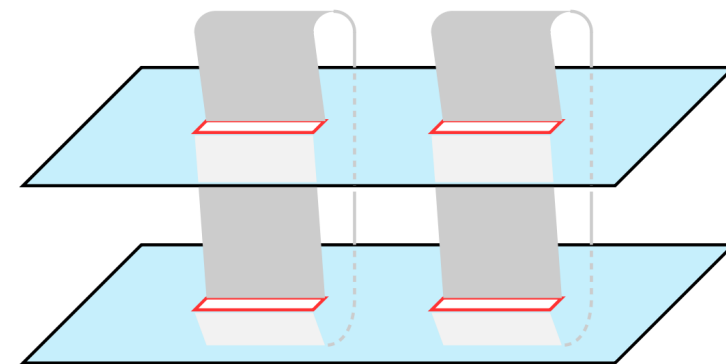
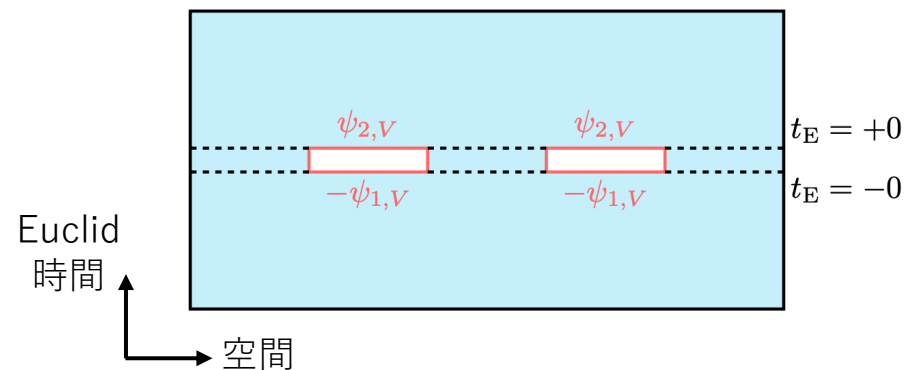
付録：レプリカ法の詳細

標的： $S_2(V) = -\log \text{Tr}_V[\rho_V^2]$

$$\rho_V(\psi_1, \psi_2) = \text{Tr}_{\bar{V}}[\langle \psi_1 | 0 \rangle \langle 0 | \psi_2 \rangle]$$



$$\text{Tr}_V[\rho_V^2] = \sum_{\psi_1, \psi_2} \rho_V(\psi_1, \psi_2) \rho_V(\psi_2, -\psi_1) \sim Z_{\Sigma_{2,2}}^F$$



レプリカ多様体

$$\boxed{Z_X^F[\rho]} = \frac{1}{2^g} \sum_{t \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)} \boxed{Z_X^B[t]} \exp(i\pi [Arf[t \cdot \rho] + Arf[\rho]])$$

↑ fermion ↑ boson ↙ トポロジカル項 ↑

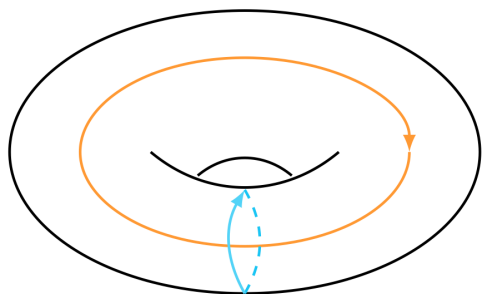
X : 扱っている時空

ρ : スピン構造

g : X の genus の数

t : \mathbb{Z}_2 ゲージ場

今回の場合: $g = 1$



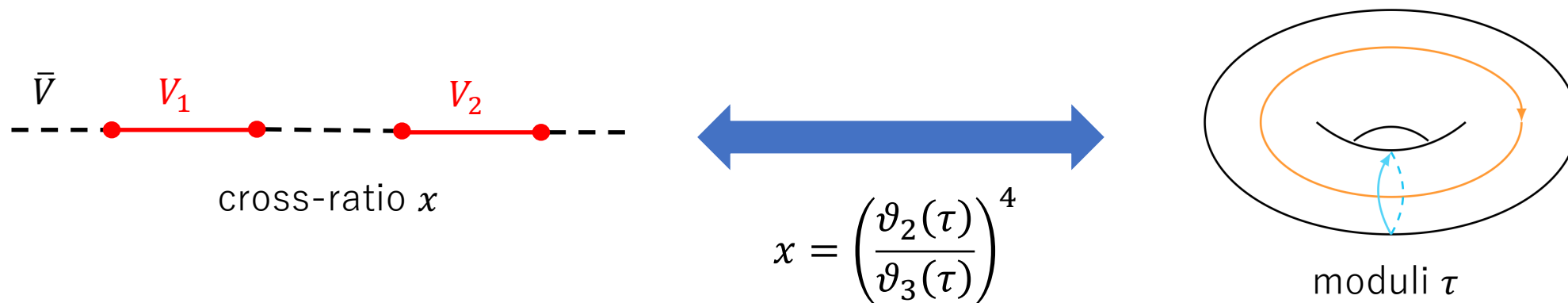
相互作用あり

$$\boxed{Z_T^F} = \frac{1}{2} \underbrace{(Z_T^B[00] + Z_T^B[01] + Z_T^B[10] - Z_T^B[11])}_{\text{自由場}}$$

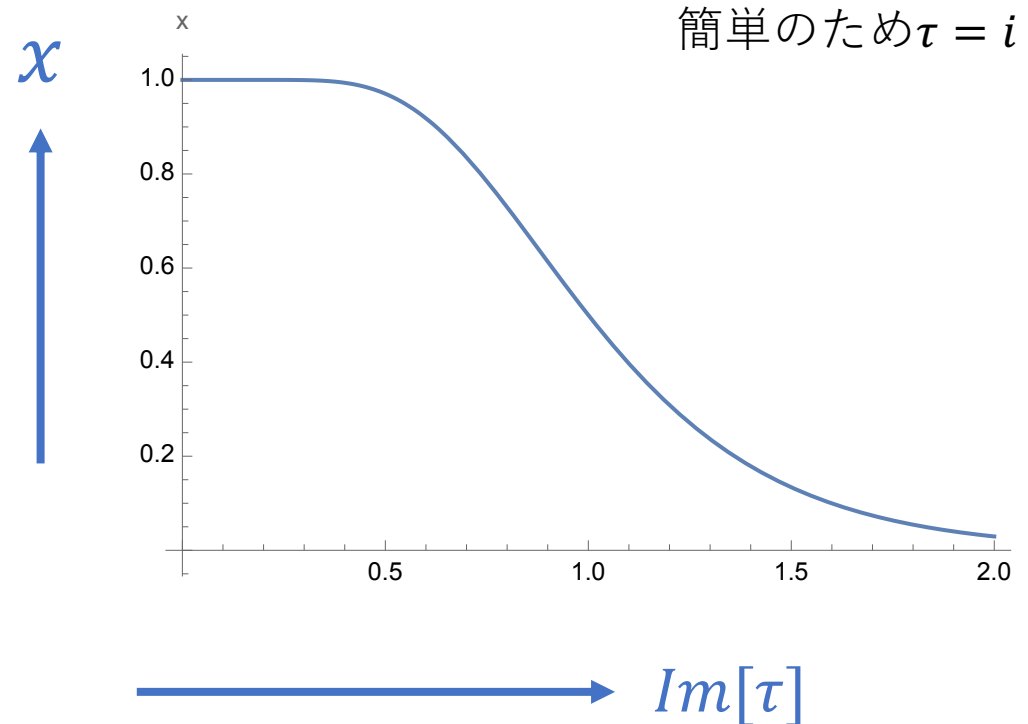
自由場

→ 解析しやすい

付録: cross-ratio x と トーラスのmoduli τ の関係

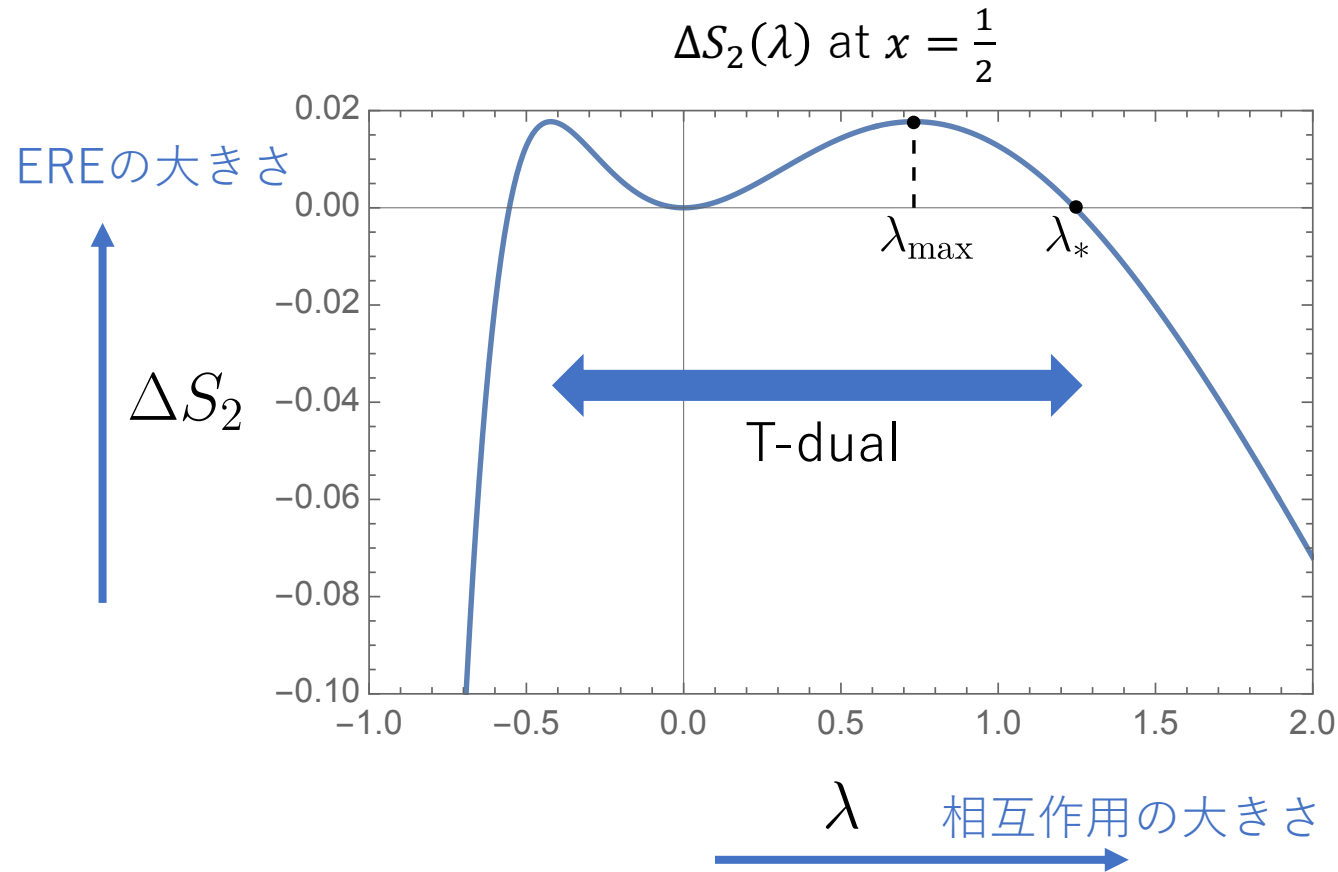


簡単のため $\tau = i\ell$ とおく。



付録: T-dualityについて

$$\Delta S_2(\lambda) = S_2(V, \lambda) - S_2(V, 0)$$



Compact bosonのT-duality :

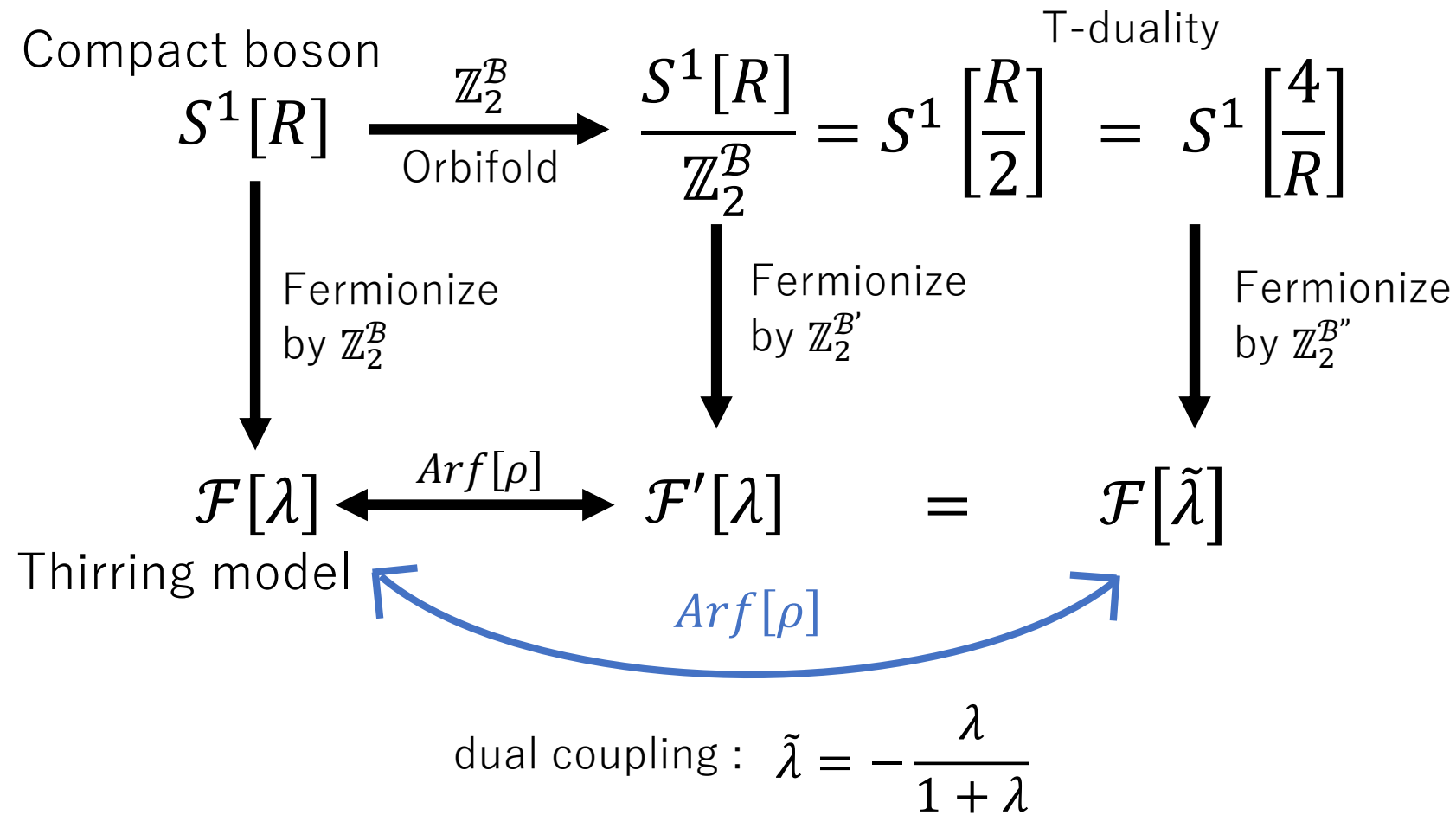
$$R \rightarrow \frac{2}{R}$$



$$\lambda \rightarrow \lambda_{\text{dual}} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

$\lambda > 0$ と $\lambda < 0$ は互いに対応している

付録: T-dualityについて

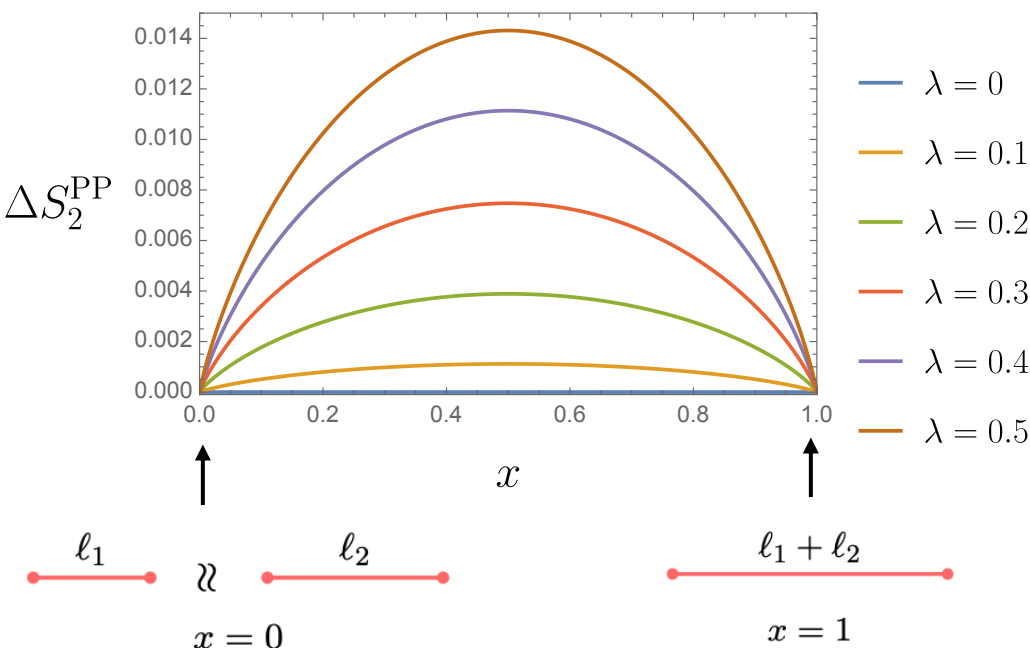


付録: Rényiエントロピー(ERE)のインターバル依存性

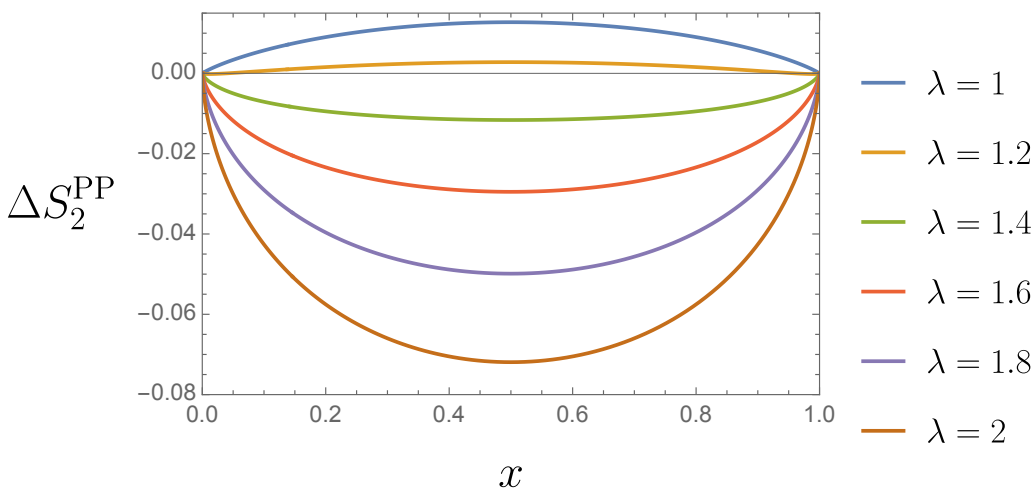
$$\Delta S_2(x) = S_2(V, \lambda) - S_2(V, 0)$$

ERE

Small λ



Large λ



1-interval, CFT [Holzhey et al 1994]

$$S_n = \frac{c}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log \left(\frac{v-u}{\epsilon} \right)$$

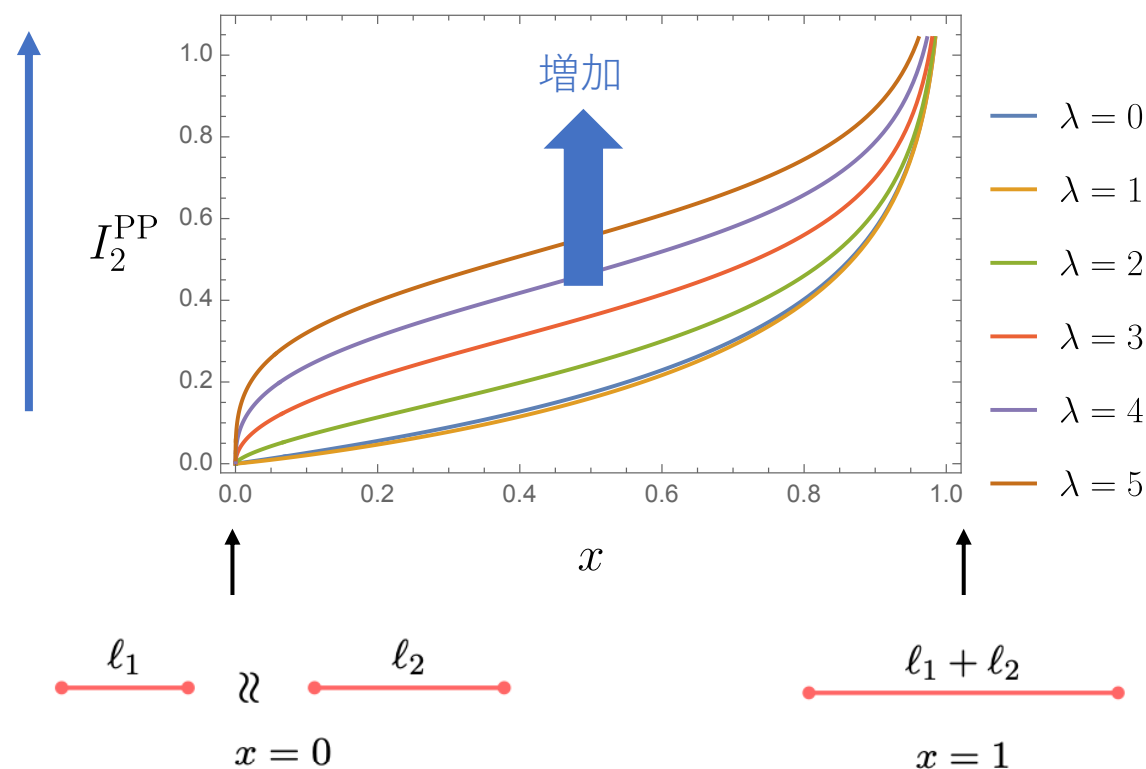
c : central charge,
 ϵ : UV cutoff

➡ 既存の結果とconsistentな振る舞い

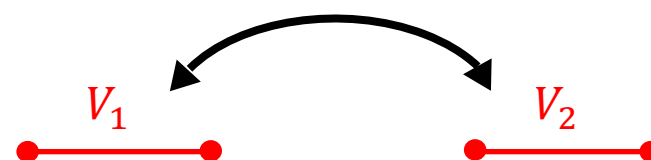
付録: 相互Rényi情報量(MRI)のインターバル依存性

$$\text{MRI} : I_n(V_1, V_2) = S_n(V_1) + S_n(V_2) - S_n(V_1 \cup V_2)$$

MRIの大きさ



エンタングル



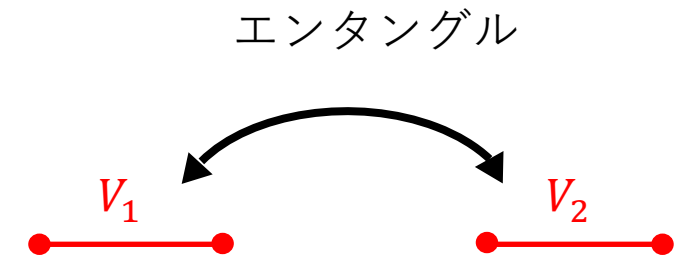
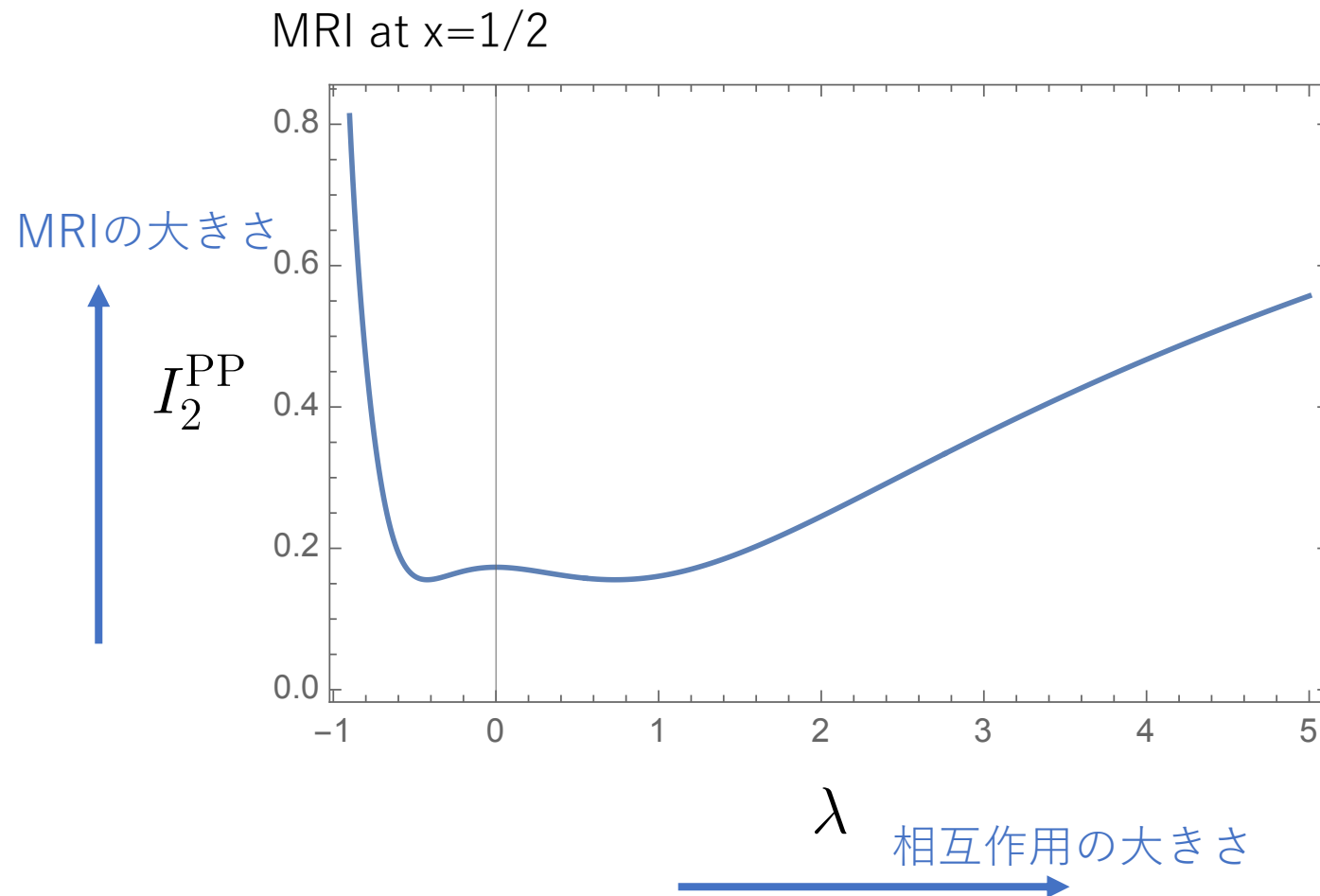
- $x \sim 0, \quad x \sim 1$: reasonableな振る舞い
- 相互作用が大きくなるとMRIが増加
- $I_2(V_1, V_2) > 0$

(参考)

$$I(V_1, V_2) = S(V_1) + S(V_2) - S(V_1 \cup V_2) > 0$$

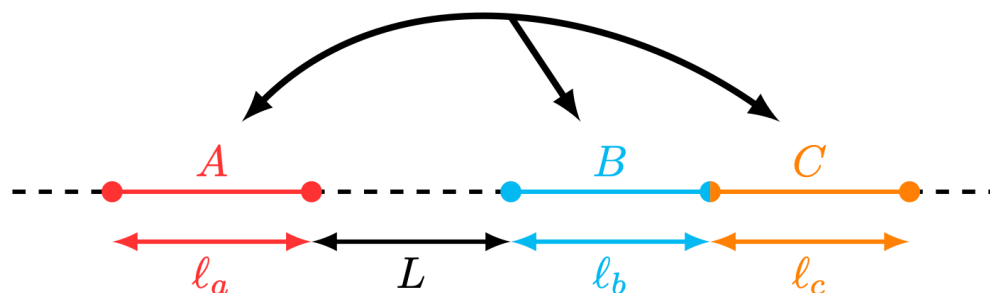
付録: 相互Rényi情報量(MRI)の結合定数依存性

$$\text{MRI} : I_n(V_1, V_2) = S_n(V_1) + S_n(V_2) - S_n(V_1 \cup V_2)$$

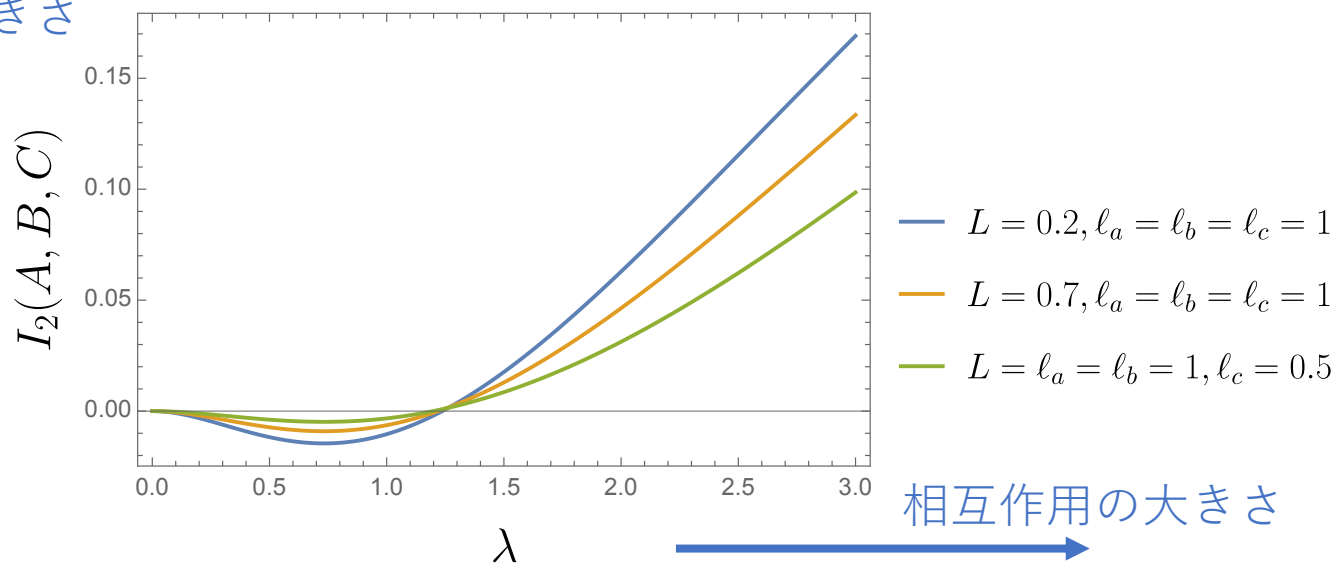


付録: トリパーティット Rényi 情報量 (TRI)

$$\text{TRI} : I_n(A, B, C) = S_n(A \cup B \cup C) - S_n(A \cup B) - S_n(B \cup C) - S_n(C \cup A) + S_n(A) + S_n(B) + S_n(C)$$



TRIの大きさ



相互作用の大きさ

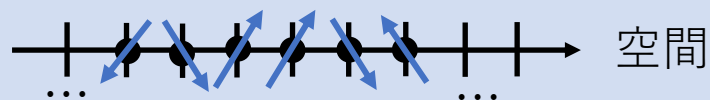


スピン模型での後続研究

[Marić, Bocini, Fagotti, 2023.12]

スピン1/2模型

$$H_{XXZ} = \sum_{\ell} (\sigma_{\ell}^x \sigma_{\ell+1}^x + \sigma_{\ell}^y \sigma_{\ell+1}^y + \Delta \sigma_{\ell}^z \sigma_{\ell+1}^z)$$



双対



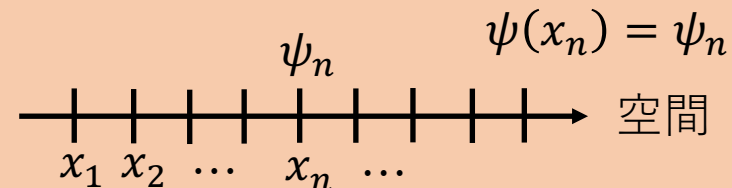
JW変換

$$\Delta \leftrightarrow \lambda$$

我々の扱ったモデル

massless Thirring model

$$\mathcal{L}_F = i \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi + \frac{\pi}{2} \lambda (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi)$$

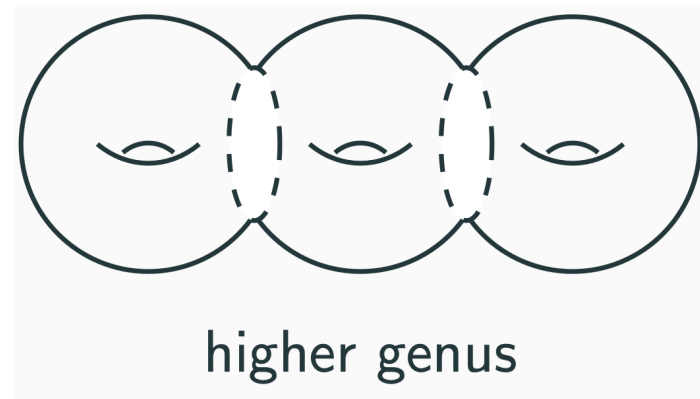


➡ 彼らの結果は我々の結果と一致。非自明なconsistency check

付録: 本研究の将来展望

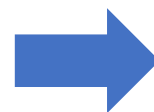
我々の研究の展望

- 領域 V が3つ以上のインターバルからなる場合
- Massive Thirring model
- 他の量子情報量 → 現在研究中



Massive Thirring model

$$\mathcal{L}_F = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \underbrace{m \bar{\psi} \psi}_{\text{質量項} \rightarrow \text{CFTではなくなる}} + \frac{\pi}{2} \lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)$$



mass perturbation

質量項 → CFTではなくなる